

Trabajo Fin de Grado

Desarrollo de un software para el cálculo
estructural de estructuras de barras y 2d
mediante los métodos de rigidez y
elementos finitos

Autor

Rafael Tobajas Alonso

Director

Luis Gracia Villa

Escuela de Ingeniería y Arquitectura (EINA)

2014

AGRADECIMIENTOS

A mi pequeña Julia por ser mi referencia en el presente y en el futuro. A su madre Sara, por darme lo mejor que tengo en esta vida.

A mi familia, por su apoyo incondicional a lo largo de todos y cada uno de mis propósitos.

A mis compañeros de sala del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Zaragoza, porque gracias a ellos las horas de trabajo fueron más amenas.

Al departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Zaragoza y en especial a Luis Gracia, por ofrecerme la oportunidad de aprender de él.

Gracias.

Desarrollo de un software para el cálculo estructural de estructuras de barras y 2d mediante los métodos de rigidez y elementos finitos

RESUMEN

Este Trabajo Fin de Grado " Desarrollo de un software para el cálculo estructural de estructuras de barras y 2d mediante los métodos de rigidez y elementos finitos", realizado dentro del Curso de Adaptación a Grado de Ingeniería Mecánica, es fruto del trabajo realizado a lo largo de 10 meses en el Área de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras (MMCTE), del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Escuela de Ingeniería y Arquitectura, bajo la dirección del Catedrático Luis Gracia Villa.

El objetivo de este trabajo ha sido desarrollar dos herramientas de uso sencillo para el cálculo mediante los métodos de rigidez y elementos finitos (MEF) de componentes estructurales de barras y 2D bajo carga estática y con comportamiento elástico lineal, usando las aplicaciones AUTOCAD, EXCEL, VISUAL BASIC y MATLAB.

La motivación para este trabajo ha consistido en intentar que estas sean herramientas de ayuda al auto aprendizaje sirviendo de apoyo a la, ya que el usuario puede seguir todos y cada uno de los pasos requeridos para el cálculo de estructuras por estos métodos.

Para ello ha sido preciso efectuar el desarrollo de algoritmos para la exportación de datos de material, cargas, condiciones de contorno, así como para el cálculo de estructuras por ambos métodos en los entornos de programación de macros de Excel y Matlab.

Por último, en el caso de estructuras continuas 2D, se han hecho comprobaciones con el software comercial Abaqus para comprobación de las aplicaciones y comparación de resultados.

INDICE

[illegible]

2.7.7. Botón "Resultados en barras (solo plano XY)"	42
Capítulo 3: programa de cálculo de elasticidad lineal por el método de los elementos finitos.....	45
3.1. Introducción a los elementos finitos y su historia	45
3.2. Funciones de interpolación	45
3.3. Deformaciones unitarias	46
3.4. Tensiones. Ecuación constitutiva. Elementos triangulares	48
3.5. Determinación de la matriz de rigidez de un elemento triangular de tres nodos.....	50
3.6. Determinación de la matriz de rigidez de un elemento rectangular de cuatro nodos.....	53
3.7. Cálculo de tensiones y deformaciones.....	60
3.8. Procedimiento en el análisis por elementos finitos	62
3.8.1. Identificación estructural.....	62
3.8.2. Matriz de rigidez	62
3.8.6. Matriz de cargas globales de la estructura	63
3.8.7. Condiciones de contorno y cálculo de desplazamientos desconocidos	63
3.8.8. Métodos de resolución del sistema de ecuaciones	63
3.9. Programa de cálculo por el método de los elementos finitos	64
3.9.1. Introducción al programa y lenguaje de programación	64
3.9.2. Pantalla inicial de introducción de datos	65
3.9.3. Botón "Importar archivo INP"	66
3.9.4. Botón "Matrices de rigidez de elementos"	68
3.9.5. Botón "Ensamblaje directo de K global"	69
3.9.6. Botón "Cálculo de K reducida"	70
3.9.7. Botón "Resultados"	71
3.9.8. Aplicación en Matlab.....	72
3.9.9. Comprobaciones con Abaqus.....	75
Bibliografía	78
Anexos.....	79

CAPÍTULO 1: OBJETIVOS Y PLANTEAMIENTO DEL PROYECTO

1.1. OBJETIVOS

Este Trabajo Fin de Grado tiene como objetivo desarrollar dos herramientas de uso sencillo para el cálculo mediante los métodos de rigidez y elementos finitos (MEF) de componentes estructurales de barras y 2D bajo carga estática y con comportamiento elástico lineal, usando las aplicaciones AUTOCAD, EXCEL, VISUAL BASIC y MATLAB.

El propósito de estas herramientas es el de servir de apoyo a la docencia en este tipo de métodos, haciendo que el usuario pueda seguir todos y cada uno de los pasos requeridos para el cálculo de estructuras por estos métodos.

En el caso de estructuras de barras se usará exclusivamente la aplicación Microsoft Excel y su lenguaje de programación de macros Visual Basic For Applications.

En el caso de estructuras continuas 2D se usa la aplicación AUTOCAD como módulo de preproceso de datos, en los que el usuario podrá definir material, cargas, condiciones de contorno y geometría. En esta misma aplicación se usa la aplicación Visual Basic For Applications para generar un archivo de texto que sea capaz de leer tanto la aplicación de cálculo desarrollada en Microsoft Excel, en Matlab y el programa comercial ABAQUS, con la intención de poder comparar posteriormente resultados.

1.2. CONTENIDOS

A lo largo de la memoria de este Trabajo Fin de Grado, el lector podrá encontrar:

- 1.Una introducción general al método de la rigidez y al MEF, describiendo de forma más extensa los fundamentos y la formulación utilizada.
- 2.Organización general de las aplicaciones, describiendo brevemente su diagrama de flujo.
- 3.Descripción breve de la interface de la aplicación.
- 4.Resultados de las aplicaciones

CAPÍTULO 2: PROGRAMA DE CÁLCULO DE BARRAS POR EL MÉTODO DE LA RIGIDEZ

2.1. INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LA RIGIDEZ Y SU HISTORIA

El método matricial de la rigidez es un método de cálculo aplicable a estructuras hiperestáticas de barras que se comportan de forma elástica y lineal. En inglés se le denomina "Direct Stiffness Method" (DSM, método directo de la rigidez), aunque también se le denomina el método de los desplazamientos. Este método se basa en estimar los componentes de las relaciones de rigidez para calcular las reacciones y/o los desplazamientos. El método de rigidez directa es la implementación más común del método de los elementos finitos. Las propiedades de rigidez del material son conjugadas en una única ecuación matricial que gobierna el comportamiento interno de la estructura idealizada. Los datos que se desconocen de la estructura son las reacciones y los desplazamientos que pueden ser calculados resolviendo dicha ecuación. El método directo de la rigidez es el más común en los programas de cálculo de estructuras (tanto comerciales como de fuente libre).

Los métodos clásicos de análisis estructural desarrollado a fines del siglo XIX, tienen las cualidades de la generalidad, simplicidad lógica y elegancia matemática.

Desgraciadamente, conducían a menudo a cálculos muy laboriosos cuando se los aplicaba en casos prácticos, y en aquella época, esto era un gran defecto. Por esta razón sucesivas generaciones de ingenieros se dedicaron a tratar de reducir el conjunto de cálculos. Muchas técnicas ingeniosas de gran valor práctico fueron apareciendo (Método de Cross), pero la mayoría de las mismas eran aplicable sólo a determinados tipos de estructuras.

La principal objeción a los primeros métodos de análisis fue que los mismos conducían a sistemas con un gran número de ecuaciones lineales, difíciles de resolver manualmente. Con los computadores, capaces de realizar el trabajo numérico, esta objeción no tiene ahora sentido, mientras que la generalidad de los métodos permanece. Esto explica por qué los métodos matriciales deben en su tratamiento básico de las estructuras más al siglo XIX que al XX.

El método tuvo sus orígenes en el campo de la aeronáutica. Los investigadores consiguieron aproximar el comportamiento estructura de las partes de un avión mediante ecuaciones simples pero que requerían grandes tiempos de cálculo.

El método consiste en asignar a la estructura de barras un modelo matemático, llamado matriz de rigidez, que relaciona los desplazamientos de un conjunto de

puntos de la estructura, llamados nudos, con las fuerzas exteriores que es necesario aplicar para lograr esos desplazamientos (las componentes de esta matriz son fuerzas generalizadas asociadas a desplazamientos generalizados). La matriz de rigidez relaciona las fuerzas nodales equivalentes y desplazamientos sobre los nudos de la estructura, mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} F_1 + R_1 \\ F_2 + R_2 \\ \vdots \\ F_n + R_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{11} & \dots & k_{11} \\ k_{11} & k_{11} & \dots & k_{11} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{11} & k_{11} & \dots & k_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix}$$

Donde:

F_i son las fuerzas nodales equivalentes asociadas a las fuerzas exteriores aplicadas sobre la estructura;

R_i son las reacciones hiperestáticas inicialmente desconocidas sobre la estructura;

δ_i los desplazamientos nodales incógnita de la estructura

n el número de grados de libertad de la estructura.

Del teorema de Maxwell-Betti se deduce que la matriz de rigidez debe ser simétrica y por tanto:

$$k_{ij} = k_{ji}$$

2.2. MÉTODO DE LA RIGIDEZ

Este método se basa en la hipótesis de que:

- Partimos de una estructura lineal, en la que todos los movimientos y esfuerzos son funciones lineales de las cargas.
- Las barras son rectas y de sección constante.
- Como en cualquier problema estático, se deben cumplir las siguientes ecuaciones:

o Ecuaciones de compatibilidad, que relacionan las deformaciones de las barras con los desplazamientos en los nudos.

o Ecuaciones constitutivas, que relacionan los desplazamientos en los nudos con las fuerzas en los extremos de las barras.

o Ecuaciones de equilibrio, que establece que la suma de fuerzas y momentos del sistema es cero.

La resolución de este sistema de ecuaciones permite obtener el valor de las incógnitas (desplazamientos nodales), a partir de los cuales se obtienen las solicitaciones de las barras de la estructura, así como las reacciones.

Cuando se van a calcular las relaciones esfuerzos de extremos de barra-desplazamientos, es neutral escoger un sistema de coordenadas que haga estas ecuaciones lo más sencillas posible.

Se tomara por lo tanto como eje 'x' el que coincide con el eje geométrico de la barra y los ejes 'y' y 'z' coincidentes con los ejes principales de la sección transversal.

Tal sistema pertenece a la barra, y no depende de la orientación de la misma en la estructura y se denominará sistema de ejes locales.

Por el contrario, cuando las piezas se unen entre sí para formar la estructura, es necesario tener un sistema de coordenadas común para todos los movimientos y esfuerzos de extremos de barras para poder aplicar las condiciones de equilibrio y compatibilidad, a dicho sistema se le denominará sistema de ejes globales.

Por otro lado, dependiendo de la estructura que estemos tratando, tendremos unos desplazamientos u otros, pero en el caso de este trabajo los desplazamientos a calcular serán los relativos a estructuras reticuladas:

- Estructura reticulada: Tres desplazamientos (uno en cada dirección de los ejes de coordenadas globales) y tres giros por nudo (uno alrededor de cada dirección de los ejes de coordenadas globales).

2.3. SISTEMAS DE REFERENCIA

Como se ha comentado anteriormente, para el análisis de la estructura nos guiaremos por dos sistemas de referencia, el sistema global, el cual estará indicado con: x' , y' , z' , que hace referencia a la totalidad de la estructura; el otro sistema de referencia será el local, el cual estará referenciado para cada elemento de la estructura, este sistema de referencia estará indicado por: x , y , z .

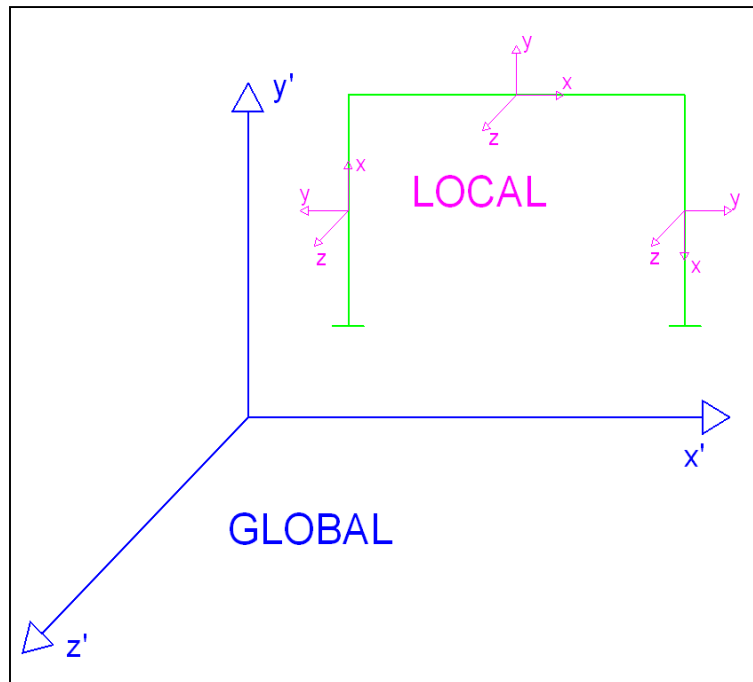


Ilustración 1: Sistemas de referencia

Es importante tener en cuenta que todas las estructuras cumplen con las condiciones de equilibrio y compatibilidad.

En la figura siguiente se muestra una barra sujeta a 2 vectores: (P_1) y (P_2), los cuales generan desplazamientos en cada extremo: (d_1) y (d_2).

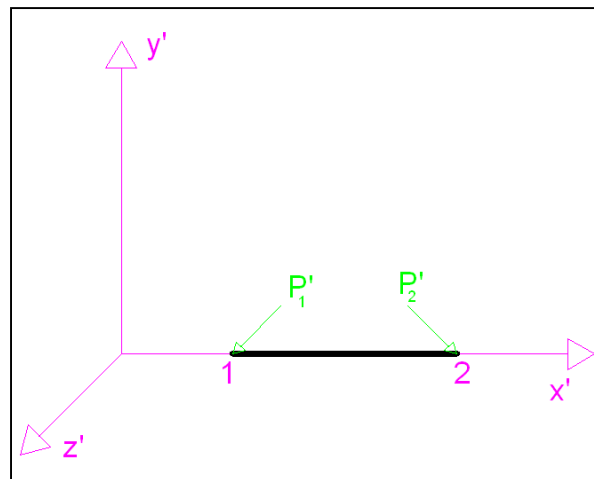


Ilustración 2: Barra con despl. en extremos

De forma matricial, para una barra sujeta a cargas en cada extremo, podemos acoplar los vectores de cargas y desplazamientos:

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

Donde puede observarse que la relación entre estos vectores la establece la matriz de rigidez, por lo que podemos escribirla de la siguiente manera:

$$P=K \cdot d$$

A esta ecuación la llamaremos: Ecuación fuerza-desplazamiento

2.4. DETERMINACIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UNA BARRA

En general, un sólido deformable real, como cualquier medio continuo es un sistema físico con un número infinito de grados de libertad. Sin embargo, para barras elásticas, el campo de desplazamientos viene dado por la llamada curva elástica cuya deformación siempre es definida con un conjunto finito de parámetros. En concreto, si tenemos definidos los desplazamientos y los giros de los nudos extremos de una barra elástica, podemos definir completamente la curva elástica que define la deformación de toda la barra.

De esta forma el desplazamiento de un punto tendrá 6 componentes, como se muestra a continuación:

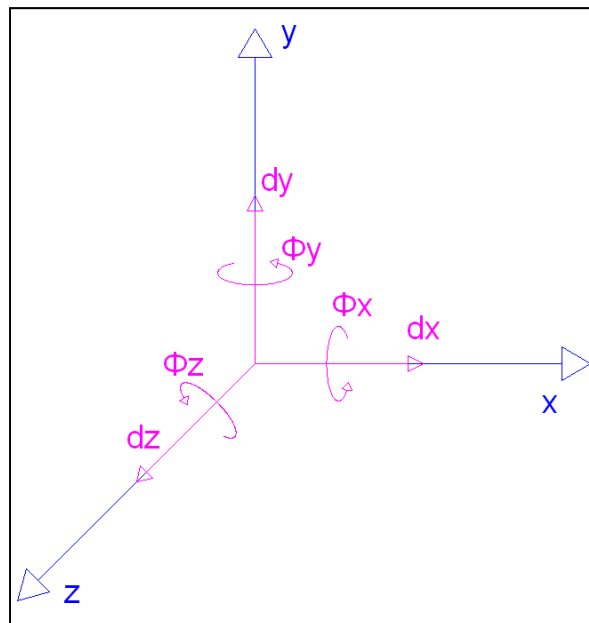


Ilustración 3: Componentes del desplazamiento

También las fuerzas tienen 6 componentes:

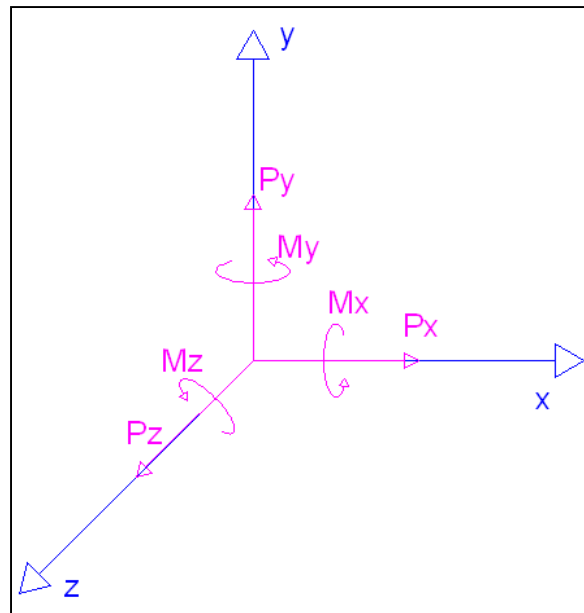


Ilustración 4: Componentes de fuerzas en un nudo

En forma matricial tenemos:

$$(d) = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix} \quad (P) = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

Para construir la matriz de rigidez de la estructura es necesario asignar previamente a cada barra individual una matriz de rigidez elemental. Esta matriz depende exclusivamente de:

1. Las condiciones de enlace en sus dos extremos, que en nuestro caso será siempre uniones rígidas (absorben fuerzas y momentos en todas las direcciones).
2. Las características de la sección transversal de la barra: área, momentos de inercia de la sección en ambas direcciones y las características geométricas generales como la longitud de la barra.
3. El número de grados de libertad por nudo, que depende de si se trata de problemas bidimensionales (planos) o tridimensionales.
4. Las propiedades mecánicas del material.

La matriz elemental relaciona las fuerzas nodales equivalentes y las fuerzas aplicadas sobre la barra con los desplazamientos y giros sufridos por los

extremos de la barra. La rigidez será la fuerza que es producida por un desplazamiento unitario.

Una barra recta tridimensional tiene 6 grados de libertad por nudo (3 de traslación y 3 de rotación). Como se dijo anteriormente, la barra tiene dos nudos, por lo que la matriz de rigidez es una matriz de 12 x 12, ya que para cada nudo tendríamos 6 grados de libertad.

La rigidez axial de una barra recta es una medida de su capacidad para resistir alargamientos o acortamientos por la aplicación de cargas según su eje (carga axial). En este caso la rigidez depende sólo del área de la sección transversal(A), el módulo de Young del material de la barra (E) y la longitud:

$$K_x = \frac{N_x}{\delta_x} = \frac{EA}{L} = P_{1x}$$

Para que exista equilibrio tenemos lo siguiente:

$$\sum F_x = 0$$

$$P_{1x} + P_{2x} = 0$$

$$P_{2x} = -\frac{EA}{L}$$

La rigidez a flexión de una barra recta es la relación entre el momento flector aplicado en uno de sus extremos y el ángulo girado por ese extremo al deformarse cuando la barra está empotrada en el otro extremo. Para barras rectas de sección uniforme existen dos coeficientes de rigidez según la dirección el momento flector.

Esta rigidez está dada como se indica a continuación:

$$K_y = \frac{M_y}{\theta_y} = \frac{EI_y}{L} \quad K_z = \frac{M_z}{\theta_z} = \frac{EI_z}{L}$$

La rigidez a cortante es la relación entre los desplazamientos verticales de un extremo de una viga y el esfuerzo cortante aplicado en los extremos para provocar dicho desplazamiento. En barras rectas de sección uniforme existen dos coeficientes de rigidez según cada una de las direcciones principales:

$$K_y = \frac{V_y}{\delta_y} = \frac{12EI_y}{L^3} \quad K_z = \frac{V_z}{\delta_z} = \frac{12EI_z}{L^3}$$

Para representar adecuadamente los desplazamientos lineales inducidos por la flexión, y los giros angulares inducidos por el cortante, se define la rigidez mixta cortante-flexión que para una barra recta resulta ser igual a:

$$K_y = \frac{6EI_y}{L^2} \quad K_z = \frac{6EI_z}{L^2}$$

La rigidez torsional en una barra recta de sección uniforme es la relación entre el momento de torsión aplicado en uno de sus extremos y el ángulo girado por este extremo, al mantener fijo el extremo opuesto de la barra:

$$K_{tors} = \tau_{tors} = \frac{M_x}{\theta_x} = \frac{GJ}{L}$$

Por lo tanto a continuación se representan los desplazamientos que se generan en una barra recta tridimensional:

1. Desplazamiento en dirección x, extremo 1

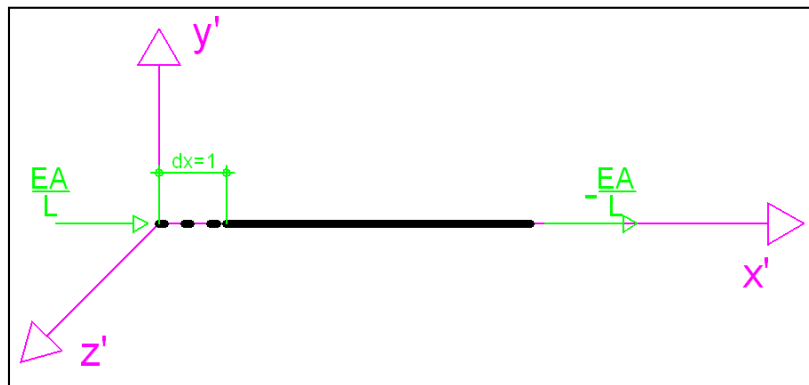


Ilustración 5: Desplz en X del extremo 1

2. Desplazamiento en dirección y, extremo 1

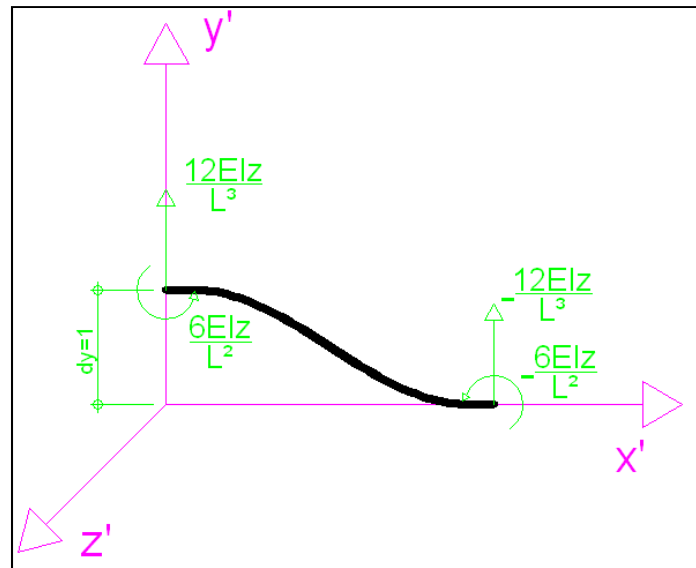


Ilustración 6: Desplz en Y del extremo 1

3. Desplazamiento en dirección z, extremo 1

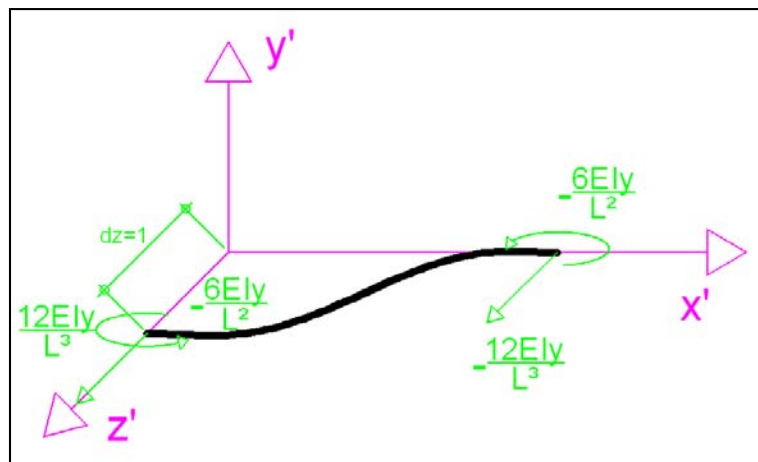


Ilustración 7: Desplz en Z del extremo 1

4. Giro alrededor del eje x, extremo 1

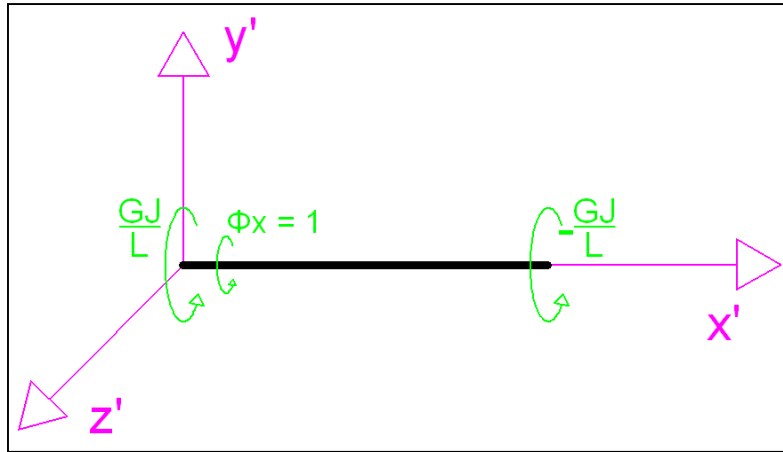


Ilustración 8: Giro en X del extremo 1

5. Giro alrededor del eje y, extremo 1

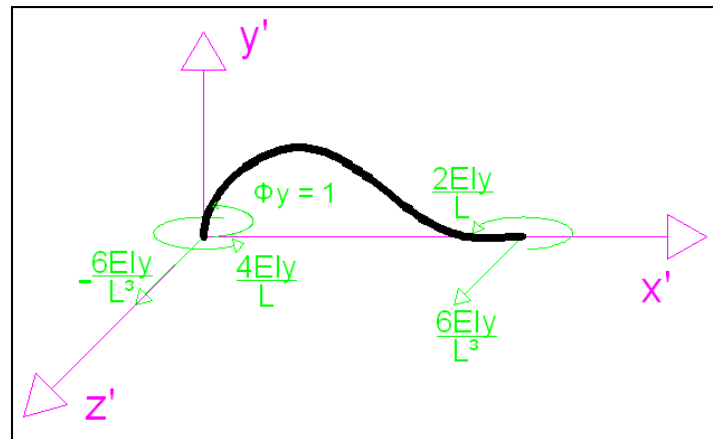


Ilustración 9: Giro en Y del extremo 1

6. Giro alrededor del eje z, extremo 1

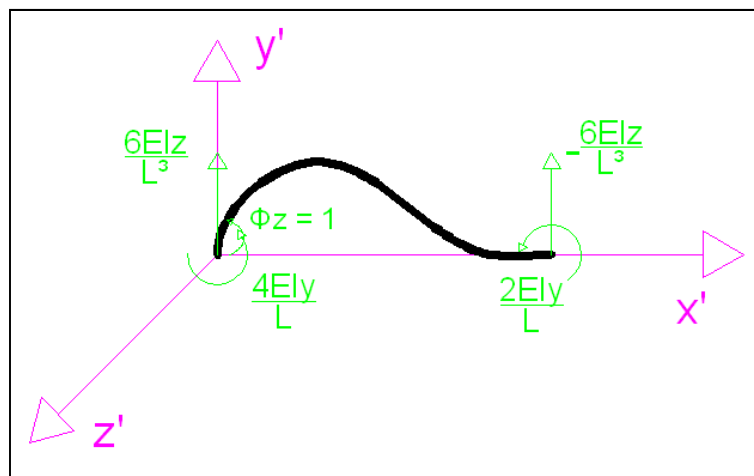


Ilustración 10: Giro en Z del extremo 1

7. Desplazamiento en dirección x, extremo 2

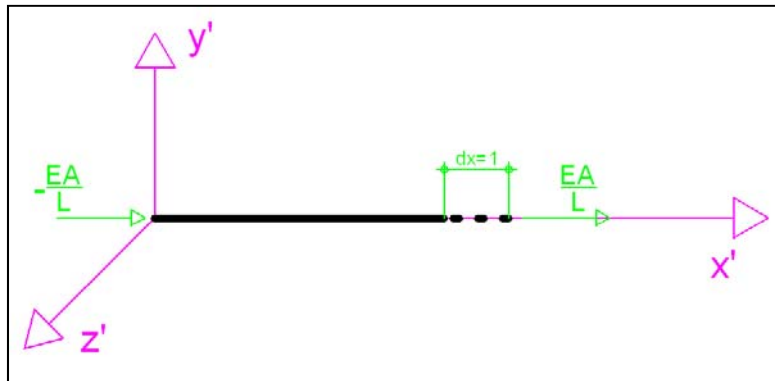


Ilustración 11: Desplz en X del extremo 2

8. Desplazamiento en dirección y, extremo 2

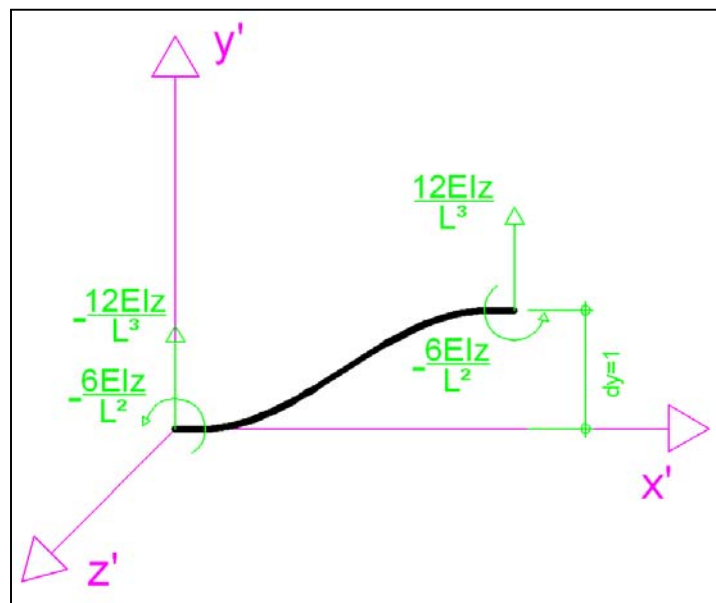


Ilustración 12: Desplz en Y del extremo 2

9. Desplazamiento en dirección z, extremo 2

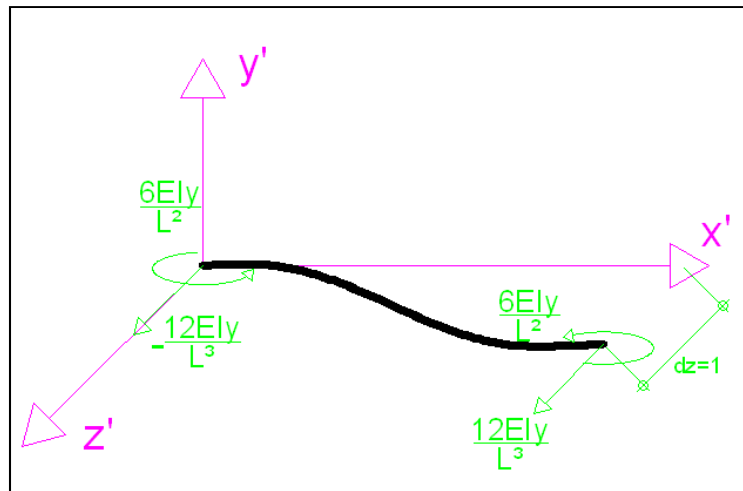


Ilustración 13: Desplz en Z del extremo 2

10. Giro alrededor del eje x, extremo 2

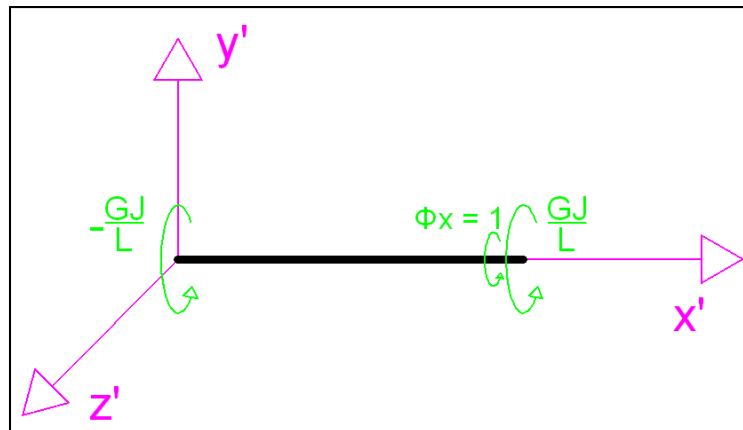


Ilustración 14: Giro en X del extremo 2

11. Giro alrededor del eje y, extremo 2

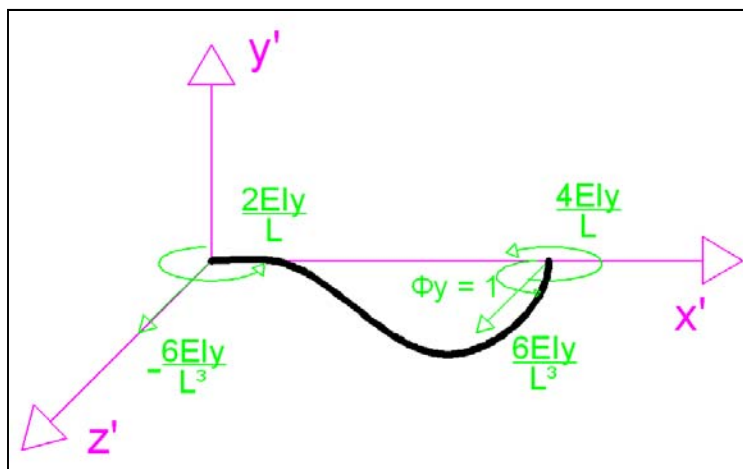


Ilustración 15: Giro en Y del extremo 2

12. Giro alrededor del eje z, extremo 2

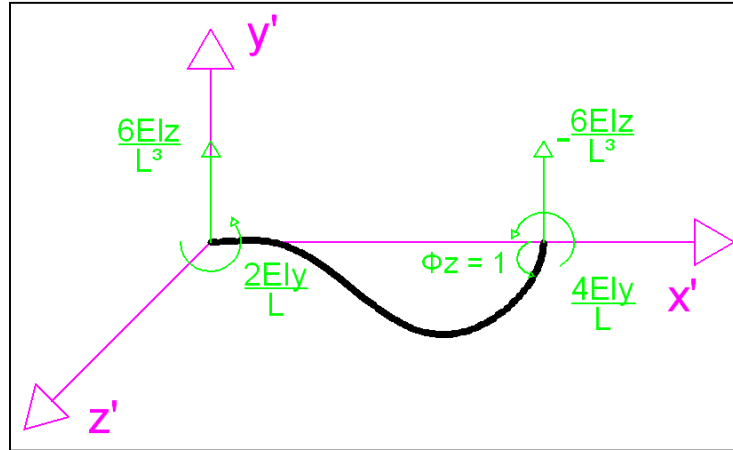


Ilustración 16: Giro en Z del extremo 2

Para determinar finalmente la ecuación fuerza-desplazamiento de la barra, hacemos la sustitución del vector (P), así como de las rigideces encontradas, por lo tanto la ecuación nos queda como se muestra a continuación:

$$\begin{pmatrix} N_{1x} \\ V_{1y} \\ V_{1z} \\ M_{1x} \\ M_{1y} \\ M_{1z} \\ N_{2x} \\ V_{2y} \\ V_{2z} \\ M_{2x} \\ M_{2y} \\ M_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ d_{1z} \\ \phi_{1x} \\ \phi_{1y} \\ \phi_{1z} \\ d_{2x} \\ d_{2y} \\ d_{2z} \\ \phi_{2x} \\ \phi_{2y} \\ \phi_{2z} \end{pmatrix}$$

La matriz está compuesta de 4 submatrices de 6×6 que toman los mismos valores (salvo el signo), así que podemos escribir la ecuación de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

2.5. ROTACIÓN DE EJES

Rotación del sistema local al global

Para poder ensamblar todas las matrices de rigidez elementales de cada una de las barras en una única matriz de rigidez global de toda la estructura, estas matrices elementales deben estar referidas a un mismo sistema de referencia, al sistema de referencia global

En la figura siguiente se puede observar el vector de cargas en el sistema local, girado respecto al sistema global.

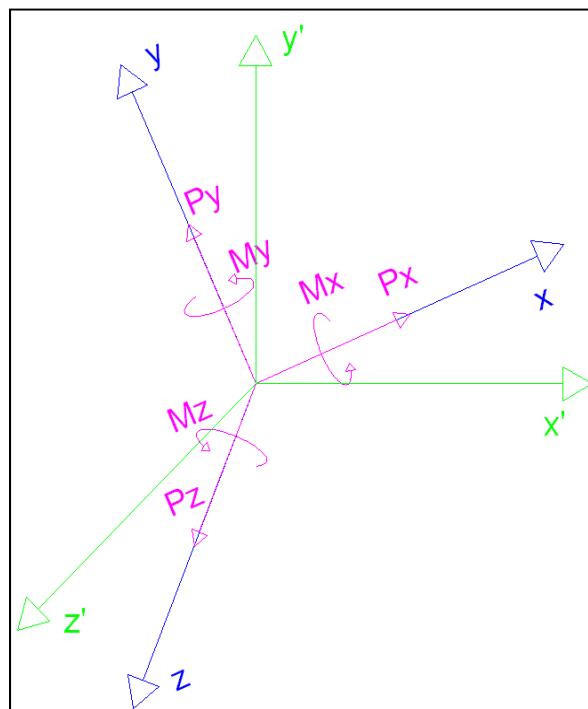


Ilustración 17: Vector local de cargas girado

Los ángulos formados respecto al sistema global se muestran a continuación:

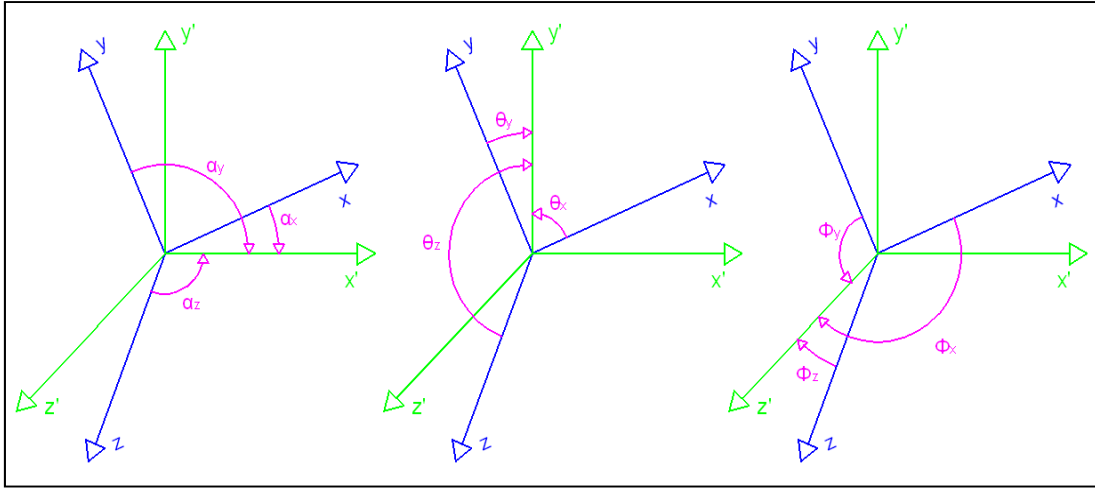


Ilustración 18: Angulos respecto al sistema global

Por lo tanto, las fuerzas en el sistema global están dadas por:

$$\begin{aligned}
 P'_x &= P_x \cdot \cos \alpha_x + P_y \cdot \cos \alpha_y + P_z \cdot \cos \alpha_z \\
 P'_y &= P_x \cdot \cos \theta_x + P_y \cdot \cos \theta_y + P_z \cdot \cos \theta_z \\
 P'_z &= P_x \cdot \cos \phi_x + P_y \cdot \cos \phi_y + P_z \cdot \cos \phi_z \\
 M'_x &= M_x \cdot \cos \alpha_x + M_y \cdot \cos \alpha_y + M_z \cdot \cos \alpha_z \\
 M'_y &= M_x \cdot \cos \theta_x + M_y \cdot \cos \theta_y + M_z \cdot \cos \theta_z \\
 M'_z &= M_x \cdot \cos \phi_x + M_y \cdot \cos \phi_y + M_z \cdot \cos \phi_z
 \end{aligned}$$

Si llamamos:

$$\cos \alpha_i = l_i ; \quad \cos \theta_i = m_i ; \quad \cos \phi_i = n_i$$

Sustituyendo en las ecuaciones anteriormente definidas y mostrándolo en notación matricial nos queda como se indica a continuación:

$$\begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \\ M'_x \\ M'_y \\ M'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_x & l_y & l_z & 0 & 0 & 0 \\ m_x & m_y & m_z & 0 & 0 & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_x & l_y & l_z \\ 0 & 0 & 0 & m_x & m_y & m_z \\ 0 & 0 & 0 & n_x & n_y & n_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

La matriz de 6x6 se conoce como matriz de rotación ortogonal (T). Esta matriz se utiliza para transformar los desplazamientos y fuerzas del sistema local al global, que en forma simplificada nos queda:

$$(P') = (T) \cdot (P)$$

Donde:

(P') Vector de cargas en el sistema global

(T) Matriz de rotación o transformación

(P) Vector de cargas en el sistema local.

De la misma manera el vector de desplazamientos que obtenemos es el siguiente:

$$(d') = (T) \cdot (d)$$

De esta ecuación podemos obtener:

$$(d) = (T)^{-1} \cdot (d')$$

Pero como la matriz (T) es ortogonal,

$$(T)^{-1} = (T)^t$$

Por lo tanto:

$$(d) = (T)^t \cdot (d')$$

Recordando la ecuación fuerza-desplazamiento para una barra en el sistema local y desarrollando el producto obtenemos:

$$(P_1) = (K_{11}) \cdot (d_1) + (K_{12}) \cdot (d_2)$$

$$(P_2) = (K_{21}) \cdot (d_1) + (K_{22}) \cdot (d_2)$$

Premultiplicando estas ecuaciones por la matriz de rotación (T) y sustituyendo en ecuaciones anteriores nos queda:

$$(T) \cdot (P_1) = (T) \cdot (K_{11}) \cdot (T)^t \cdot (d'_1) + (T) \cdot (K_{12}) \cdot (T)^t \cdot (d'_2)$$

$$(T) \cdot (P_2) = (T) \cdot (K_{21}) \cdot (T)^t \cdot (d'_1) + (T) \cdot (K_{22}) \cdot (T)^t \cdot (d'_2)$$

Sustituyendo:

$$(P'_1) = (T) \cdot (K_{11}) \cdot (T)^t \cdot (d'_1) + (T) \cdot (K_{12}) \cdot (T)^t \cdot (d'_2)$$

$$(P'_2) = (T) \cdot (K_{21}) \cdot (T)^t \cdot (d'_1) + (T) \cdot (K_{22}) \cdot (T)^t \cdot (d'_2)$$

De estas ecuaciones se puede observar que los vectores de carga y desplazamiento están en el sistema de referencia global, ya que:

$$(P') = (K') \cdot (d')$$

De lo que podemos concluir

$$(K'_{ij}) = (T) \cdot (K_{ij}) \cdot (T)^t$$

Esta ecuación nos representa la rotación de las submatrices de rigideces del sistema local al global, de manera que tenemos:

$$\begin{aligned}(P'_1) &= (K'_{11}) \cdot (d'_1) + (K'_{12}) \cdot (d'_2) \\ (P'_2) &= (K'_{21}) \cdot (d'_1) + (K'_{22}) \cdot (d'_2)\end{aligned}$$

Que son las ecuaciones fuerza desplazamiento de la barra en el sistema de referencia global.

Rotación del sistema global al local

Cuando se han determinado los desplazamientos en cada uno de los grados de libertad de la estructura, se calculan los elementos mecánicos (carga axial, fuerzas cortantes y momentos flectores), se necesita rotarlos al sistema local ya que se encuentran en el global, para hacerlo solo basta multiplicar la fuerza por la matriz de rotación transpuesta:

$$(P) = (T)^t \cdot (P')$$

Aplicación para el análisis de estructuras 3D

Sabemos que la ecuación fuerza-desplazamiento de una barra es:

$$(P') = (K') \cdot (d')$$

Además sabemos que:

$$(K'_{ij}) = (T) \cdot (K_{ij}) \cdot (T)^t$$

La matriz de rotación (T) para una barra la podemos obtener como se indica a continuación:

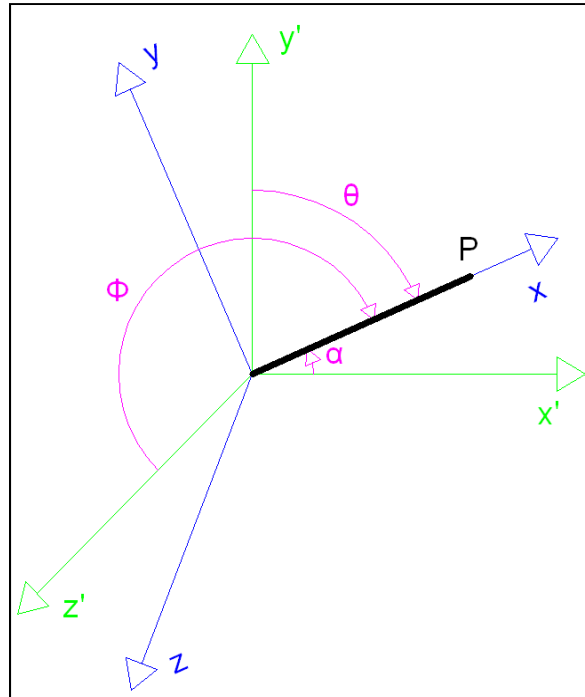


Ilustración 19: Angulos del sistema local

$$P'_x = P \cdot \cos \alpha$$

$$P'_y = P \cdot \cos \theta$$

$$P'_z = P \cdot \cos \phi$$

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{L}$$

$$\cos \theta = \frac{y_2 - y_1}{L}$$

$$\cos \phi = \frac{z_2 - z_1}{L}$$

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Si llamamos:

$$\cos \alpha = l ; \cos \theta = m ; \cos \phi = n$$

, en forma matricial tenemos:

$$\begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \cdot P$$

La matriz de rotación es:

$$(T) = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

de la matriz de 12x12 y considerando sólo la rigidez axial de las barras:

$$(K) = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{pmatrix}$$

De donde:

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{EA}{L} & K_{12} &= -\frac{EA}{L} \\ K_{21} &= -\frac{EA}{L} & K_{22} &= \frac{EA}{L} \end{aligned}$$

De estas ecuaciones se puede observar que:

$$(K'_{12}) = (K'_{21}) = -(K'_{11}) \quad (K'_{22}) = (K'_{11})$$

Por lo tanto la rigidez para armaduras tridimensionales está dada por:

$$(K'_{11}) = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \cdot \frac{EA}{L} \cdot (l \quad m \quad n)$$

$$(K'_{11}) = \frac{EA}{L} \cdot \begin{pmatrix} l^2 & l & l \\ m & m^2 & m \\ n & n & n^2 \end{pmatrix}$$

2.6. PROCEDIMIENTO EN EL ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS

2.6.1. Identificación estructural

En esta primera parte se definirá la estructura a base de datos y números.

- En primer lugar se definen como ejes globales para toda la estructura los ejes X, Y y Z.
- Posteriormente se definen cada uno de los nudos que conformarán la estructura, definiendo sus coordenadas en referencia a los ejes globales.
- Conectividad de los elementos: se identifica para cada barra el nudo inicial y final. La misma queda definida automáticamente por el orden establecido para la numeración de los nudos de la barra. El eje 'x' local coincide con el

eje geométrico de la barra, siendo el sentido positivo el que va del nudo de menor numeración al de mayor numeración. Los otros ejes formaran un triedro directo.

- Se definirán también secciones de barras, cada una con sus propiedades y materiales, de forma que a cada barra se le deba asignar un tipo de sección y un tipo de material.
- Se definirán también secciones de barras, cada una con sus propiedades y materiales, de forma que a cada barra se le deba asignar un tipo de sección y un tipo de material.
- También se definirán las condiciones de contorno, definiendo en los nudos que lo requieran el desplazamiento en cada uno de los ejes, así como los giros.
- Por último se definen las cargas que actuarán en la estructura, pudiendo estas ser aplicadas en las barras y/o en los nudos tanto de forma distribuida como de forma puntual.
- También será posible introducir la hipótesis de carga para que el programa mayorare las cargas. Se listan a continuación las distintas hipótesis programadas con sus coeficientes de mayoración, cuyos valores corresponden a los citados en el Código Técnico de la Edificación, Documento Básico "Seguridad Estructural", tabla 4.1:

Hipótesis	Coef. De mayoración de cargas
Sin mayorar	1.00
Carga permanente	1.35
Sobrecarga	1.50

Tabla 1: Coeficientes de mayoración de cargas

2.6.2. Matriz de rigidez

Se forma la matriz de rigidez de cada una de las barras basada en el sistema global de coordenadas, teniendo en cuenta lo expuesto en los puntos anteriores de "2.4. Determinación de la matriz de rigidez de una barra" y "2.5. Rotación de ejes".

2.6.3. Vector de cargas nodales

En el caso de que las cargas estén aplicadas en los nudos, existe por lo tanto una correspondencia biunívoca entre los puntos de aplicación de las cargas y

los desplazamientos que están siendo calculados, por lo que implementar la carga en el vector de cargas nodales es trivial.

En el caso de las cargas estén distribuidas en las barras, de forma distribuida o concentrada, se debe sustituir las cargas en las mismas por un sistema de cargas equivalentes aplicadas en los nudos que produzca en la estructura el mismo efecto que las cargas originales.

Aplicando el principio de superposición, que es válido por haber supuesto que el sistema es lineal, se puede descomponer las cargas tal como se indica en la figura:

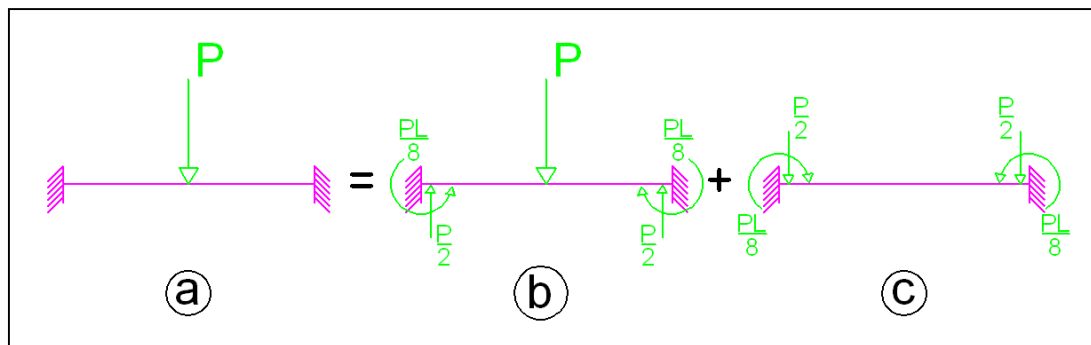


Ilustración 20: Descomposición en cargas nodales

Como se puede observar las cargas, reacciones y deformaciones de la estructura a) serán equivalentes a la suma de los dos estados b) y c).

Como las deformaciones de nudos en b) son nulas, serán iguales las deformaciones de los casos c) y a). O sea que las cargas de c) producen la misma respuesta estructural en lo referente a desplazamientos de nudos que las cargas originales.

Estas serán entonces las cargas equivalentes en los nudos, que serán las reacciones que se producen en el empotramiento perfecto pero cambiadas de signo.

2.6.4. Rotación de ejes en el plano

Tal y como se realizó con la matriz de rigidez de cada elemento, el vector de cargas nodales de cada una de las barras tiene que ser expresado en coordenadas globales, por lo que mediante el mismo procedimiento y ya teniendo calculada de la matriz de giro de cada una de las barras, es directa la aplicación de la misma matriz al vector de cargas nodales.

2.6.5. Matriz global de rigidez de la estructura

Una vez obtenidas las matrices elementales de rigidez de cada una de las barras se puede proceder a ensamblar la matriz global de rigidez de la estructura.

La matriz de rigidez global de la estructura tendrá tantas filas y tantas columnas como nudos por sus grados de libertad tenga la estructura (6 grados de libertad).

Se obtiene de calcular las submatrices de cada barra en la posición correspondiente.

En las posiciones en las que se tenga varias submatrices se producirá el ensamble de la matriz, y a ello lo llamaremos elementos ensamblados.

Veamos cómo funciona apoyándonos en la siguiente estructura:

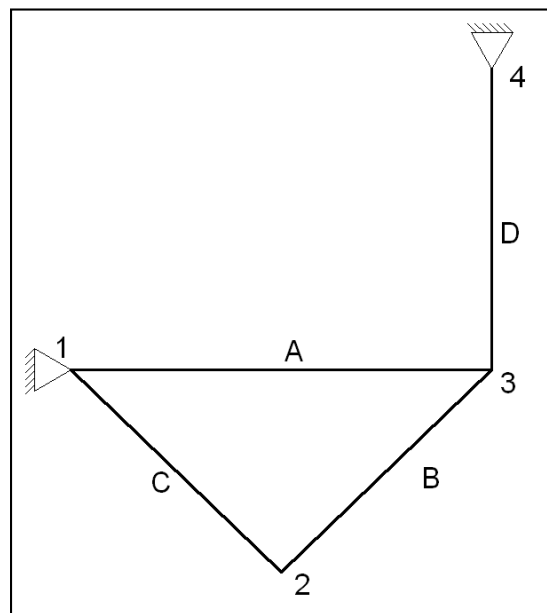


Ilustración 21: Estructura de ejemplo

Tenemos cuatro barras:

Barra A, cuyo nudo menor es el 1 y el nudo mayor es el 3

Barra B, cuyo nudo menor es el 2 y el nudo mayor es el 3

Barra C, cuyo nudo menor es el 1 y el nudo mayor es el 2

Barra D, cuyo nudo menor es el 3 y el nudo mayor es el 4

Cada barra tendrá una matriz de rigidez que ocupará cierto lugar en la matriz global.

Barra A:

$$\begin{pmatrix} (K_{11}^A)_{11} & (K_{12}^A)_{13} \\ (K_{21}^A)_{31} & (K_{22}^A)_{33} \end{pmatrix}$$

Barra B:

$$\begin{pmatrix} (K_{11}^B)_{22} & (K_{12}^B)_{23} \\ (K_{21}^B)_{32} & (K_{22}^B)_{33} \end{pmatrix}$$

Barra C:

$$\begin{pmatrix} (K_{11}^C)_{11} & (K_{12}^C)_{12} \\ (K_{21}^C)_{21} & (K_{22}^C)_{22} \end{pmatrix}$$

Barra D:

$$\begin{pmatrix} (K_{11}^D)_{33} & (K_{12}^D)_{34} \\ (K_{21}^D)_{43} & (K_{22}^D)_{44} \end{pmatrix}$$

Todas estas submatrices de rigidez están referidas a los ejes locales de cada una de las barras, por lo que antes de ensamblarlas en la matriz global de rigidez de la estructura hay que hacer el pertinente cambio de sistema de referencia tal y como se describe en el apartado "2.5. Rotación de ejes".

Cada una de estas submatrices referidas a los ejes globales, irán ubicadas en la matriz de rigidez global de la estructura según la posición que marca el subíndice que aparece fuera del paréntesis.

Aquellas submatrices que tengan el mismo subíndice, se sumaran en la matriz de rigidez de la estructura.

Obteniéndose la siguiente matriz de rigidez de la estructura, en este caso en ejes locales:

Nudos	1	2	3	4
1	$\begin{bmatrix} (K_{11}^A)_{11} + (K_{11}^C)_{11} & (K_{12}^C)_{12} & (K_{12}^A)_{13} & 0 \\ (K_{21}^C)_{21} & (K_{11}^B)_{22} + (K_{22}^C)_{22} & (K_{12}^B)_{23} & 0 \\ (K_{21}^A)_{31} & (K_{21}^B)_{32} & (K_{22}^A)_{33} + (K_{22}^B)_{33} + (K_{11}^D)_{33} & (K_{12}^D)_{34} \\ 0 & 0 & (K_{21}^D)_{43} & (K_{22}^D)_{44} \end{bmatrix}$			
2				
3				
4				

2.6.6. Matriz de cargas globales de la estructura

De forma similar al apartado anterior se ensambla la matriz de cargas globales de la estructura. Teniendo en cuenta que será una matriz con una sola

columna, se sumarán las cargas en cada uno de los nudos que tengan la misma dirección.

2.6.7. Condiciones de contorno y cálculo de desplazamientos desconocidos

Un sistema de ecuaciones: $A = K \cdot X$ correspondiente a una estructura completa antes de aplicarse las condiciones de contorno es indeterminado, pues K es singular.

La razón de esta singularidad es el resultado de no haberse considerado las vinculaciones o apoyos de la estructura en el exterior. Al introducirse las condiciones de contorno desaparece la indeterminación, siempre que el número de apoyos sea por lo menos el mínimo necesario para eliminar los movimientos de cuerpo rígido de la estructura.

El conocimiento de determinados movimientos nodales, disminuye el número de incógnitas, tornándose innecesarias las ecuaciones correspondientes a estos desplazamientos.

La eliminación de la ecuación de un desplazamiento implica la destrucción de la banda (fila y columna correspondiente) de la matriz de rigidez y de de la matriz de cargas, lo cual exigirá un reacomodamiento de las incógnitas del problema.

A la matriz resultante de esta operación la llamamos Matriz de Rigidez Reducida y es la matriz de que relaciona fuerzas conocidas con desplazamientos desconocidos.

El sistema de ecuaciones reducido resultante es el que nos proporciona las incógnitas de los desplazamientos.

2.6.8. Métodos de resolución del sistema de ecuaciones

2.6.8.1.- Algoritmo de eliminación de Gauss-Jordan

El algoritmo de eliminación de Gauss-Jordan es un algoritmo del álgebra lineal que sirve para determinar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. El método de Gauss transforma la matriz de coeficientes en una matriz triangular superior. El método de Gauss-Jordan continúa el proceso de transformación hasta obtener una matriz diagonal.

La complejidad computacional de la eliminación gaussiana es aproximadamente n^3 . Esto es, el número de operaciones requeridas es n^3 si el tamaño de la matriz es $n \times n$.

El procedimiento del algoritmo es el siguiente:

- 1.-Ir a la columna no cero extrema izquierda
- 2.-Si el primer renglón tiene un cero en esta columna, intercambiarlo con otro que no lo tenga
- 3.-Luego, obtener ceros debajo de este elemento delantero, sumando múltiplos adecuados del renglón superior a los renglones debajo de él
- 4.-Cubrir el renglón superior y repetir el proceso anterior con la submatriz restante. Repetir con el resto de los renglones (en este punto la matriz se encuentra en la forma de escalón)
- 5.-Comenzando con el último renglón no cero, avanzar hacia arriba: para cada renglón obtener un 1 delantero e introducir ceros arriba de éste sumando múltiplos correspondientes a los renglones correspondientes

2.6.8.2.- Cálculo directo de la inversa de la matriz de rigidez reducida

Aprovechando las funciones ya programadas de Microsoft Excel, se puede calcular de forma inmediata la matriz inversa de la matriz de rigidez reducida.

Como se ha comentado anteriormente, el sistema de ecuaciones aplicable a la estructura para conocer los desplazamientos es:

$$F_{red} = K_{red} \cdot Despl_{desconocidos}$$

Si somos capaces de conocer la K_{red}^{-1} :

$$K_{red}^{-1} \cdot F_{red} = K_{red}^{-1} \cdot K_{red} \cdot Despl_{desconocidos} = [1] \cdot Despl_{desconocidos}$$

Por lo que:

$$Despl_{desconocidos} = K_{red}^{-1} \cdot F_{red}$$

En este caso, el procedimiento es más rápido, y aunque menos ilustrativo puede ahorrarnos tiempo de cálculo.

2.6.9. Cálculo de reacciones y esfuerzos en las barras

Una vez conocidos los desplazamientos en cada uno de los nudos, a través de la matriz de rigidez en coordenadas globales de cada una de las barras podemos conocer las fuerzas (reacciones) en cada uno de los nudos de la barra, mediante la expresión:

$$F_{barra} = K_{barra} \cdot Despl_{barra}$$

Mediante la matriz de giro calculada para cada barra podemos expresar los desplazamientos nodales existentes en los extremos de cada barra en coordenadas locales, para así, conocer las fuerzas (reacciones) en coordenadas locales en dichos extremos. Conociendo estos y sabiendo las cargas aplicadas en las barras, si las hubiera, podremos calcular los esfuerzos en cada una de las barras mediante un cálculo clásico de esfuerzos en una barra isostática de reacciones conocidas.

2.7. PROGRAMA DE CÁLCULO POR EL MÉTODO DE LA RIGIDEZ

2.7.1. Introducción al programa y lenguaje de programación

Este proyecto consiste en el desarrollo de una hoja de cálculo de Microsoft Excel interactiva con macros implementadas para el análisis de barras por el método matricial de la rigidez.

El programa permitirá al usuario realizar este análisis para estructuras con cualquier número de nudos y la limitación está en 128 barras, para lo que el usuario sólo tendrá que ingresar los datos, valores y tipos de cargas externas, número de nudos con sus coordenadas, número de barras y que nudos las definen, tipo de apoyos, coeficientes de materiales y secciones que serán aplicables a cada una de las barras.

Una vez ingresados los datos y pulsando los botones adecuados, la hoja de cálculo realizará un análisis matricial siguiendo dicho modo paso por paso.

En primer lugar el usuario deberá calcular las matrices de rigidez de cada uno de los elementos, así como las matrices de cargas en los nudos.

Una vez realizado este paso, mediante otro botón, el usuario deberá ensamblar las matrices de rigidez y de fuerzas nodales de toda la estructura, quedando así relacionadas las rigideces, con las fuerzas exteriores y con los desplazamientos.

El siguiente paso será calcular la matriz ensamblada reducida, quitando aquellas filas y columnas cuyos desplazamientos y/o giros estén prescritos, lo cual nos dejará un sistema de ecuaciones lineales por resolver. En este mismo paso el usuario puede calcular dicho sistema por los dos métodos expuestos anteriormente y así obtener los desplazamientos y giros nodales desconocidos.

Por último, se podrán calcular las fuerzas nodales desconocidas en cada uno de los nudos, y así poder calcular, sabiendo las cargas en las barras en el caso de que las hubiera, las leyes de esfuerzos en cada una de las barras.

Es importante destacar, que por la complicación que conllevaba su programación el usuario solo podrá obtener resultados gráficos de las leyes de

deformada, esfuerzos axiales, cortantes y momentos flectores cuando las cargas y la estructura esté únicamente definida en el plano XY. En el caso de estructuras 3D, el programa es capaz de calcular los desplazamientos y fuerzas nodales sin ningún problema, pero el esfuerzo para la obtención de resultados gráficos en 3D no era el objeto de este trabajo.

El lenguaje de programación empleado es el que lleva implementado Microsoft Excel 2007 para realizar sus macros. Este lenguaje es "Visual Basic for Applications".

2.7.2. Pantalla inicial de introducción de datos

Como se puede ver en la imagen, el usuario puede navegar por la hoja "Datos Generales" en los que se deben introducir coherentemente los datos de la estructura. Con los 6 botones superiores se puede navegar por esta misma hoja para no tener que estar desplazándose con la barra de la parte inferior derecha.

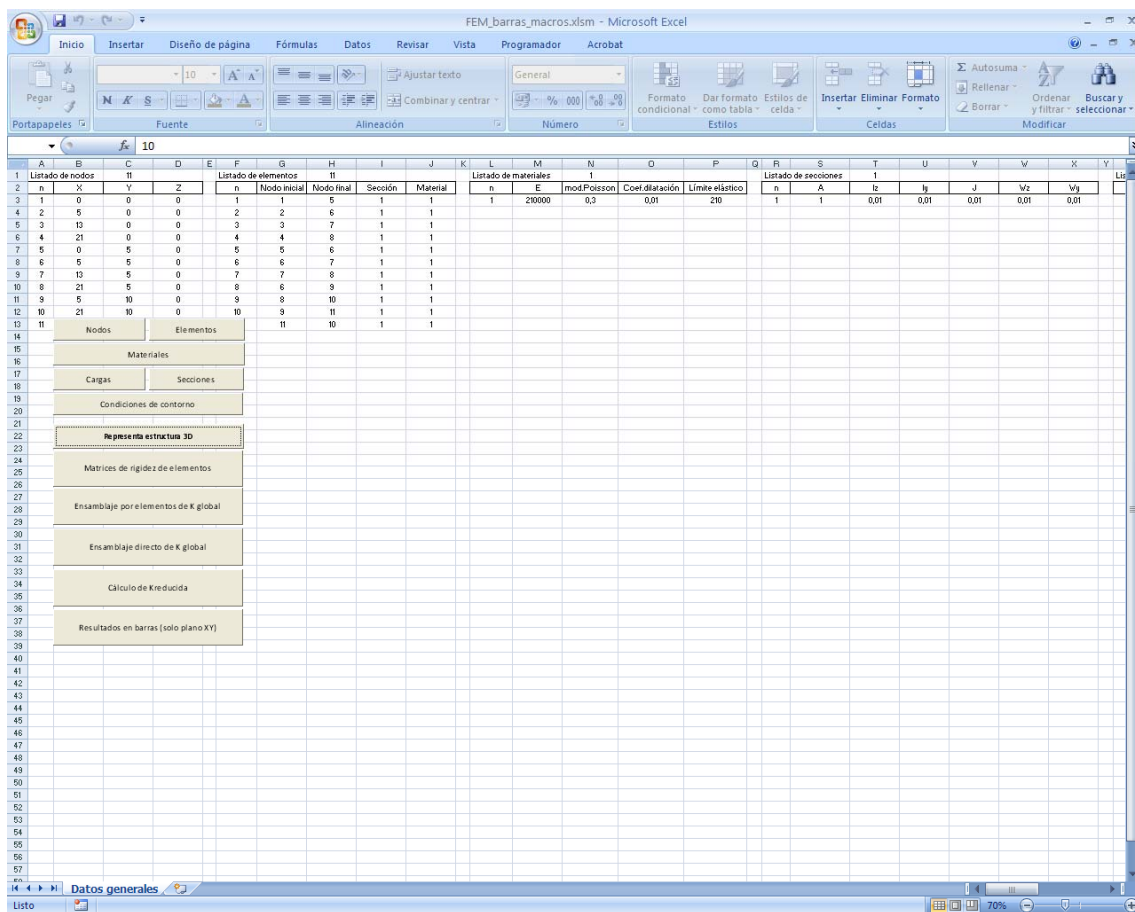


Figura 1: Pantalla "Datos Generales"- Met.Rigidez

2.7.2. Botón "Representación estructura 3D"

Con este botón el usuario puede verificar la geometría de la estructura cuyos datos ha introducido para estar seguro de ser la estructura deseada. El resultado obtenido de pulsar este botón se muestra en la hoja "Estructura", que a su vez adjunta botones para poder girar, acercar y alejar la vista y perspectiva del gráfico que muestra la estructura.

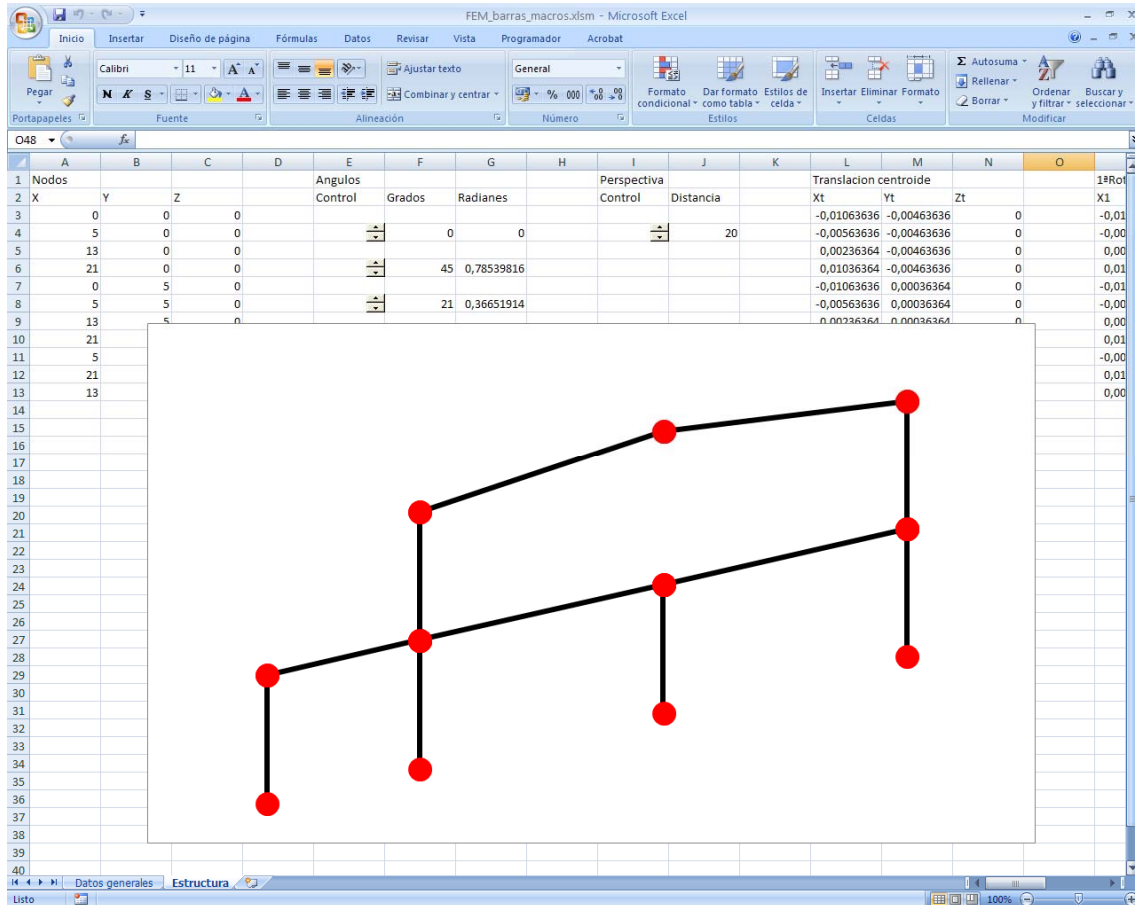


Figura 2: Pantalla "Estructura 3D"- Met.Rigidez

2.7.3. Botón "Matrices de rigidez de elementos"

Con este botón el usuario calcula las matrices de rigidez y cargas de cada una de las barras en coordenadas globales. Para ello el programa crea una hoja para cada una de las barras en las que importa los datos que definen la barra, y calcula matriz de rigidez en coordenadas locales, matriz de giro, matriz de cargas nodales, matrices en coordenadas locales, etc. El resultado obtenido de pulsar este botón se muestra en la hoja "Barra+nº", y que se puede ver en la siguiente imagen.

Columnas	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	Fuerzas	Fuerzas locales	Totales	GIRO, T = F, locales
25	DesplX_5	42000	0	0	0	0	0	-42000	0	0	0	0	0	0	0	0
26	DesplY_5	0	2016	0	0	0	504	0	-2016	0	0	0	504	-250	0	-250
27	DesplZ_5	0	0	2016	0	-12600	0	0	0	-2016	0	-12600	0	0	0	0
28	Giro en X_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	Giro en Y_5	0	0	-12600	0	161538462	0	0	0	-161538462	0	0	0	0	0	0
30	Giro en Z_5	0	504	0	0	0	1680	0	-504	0	0	840	0	0	0	0
31	DesplX_6	-42000	0	0	0	0	0	42000	0	0	0	0	0	-208,33333	-208,33333	-208,33333
32	DesplY_6	0	-2016	0	0	0	-504	0	2016	0	0	-504	-250	0	0	0
33	DesplZ_6	0	0	-2016	0	12600	0	0	0	2016	0	12600	0	0	0	0
34	Giro en X_6	0	0	0	0	-161538462	0	0	0	0	0	161538462	0	0	0	0
35	Giro en Y_6	0	0	-12600	0	0	840	0	0	12600	0	0	0	0	0	0
36	Giro en Z_6	0	504	0	0	0	1680	0	-504	0	0	1680	208,33333	208,33333	208,33333	208,33333

Figura 3: Pantalla "Barra"- Met.Rigidez

2.7.4. Botón "Ensamblaje por elementos de la K global"

Con este botón el usuario calcula la matriz de rigidez global de la estructura elemento por elemento, sombreando las submatrices del elemento recién ensamblado en la matriz global, generando un botón para poder ensamblar el siguiente elemento. Con esta opción se pretende que el programa tenga un aspecto docente en la explicación del método.

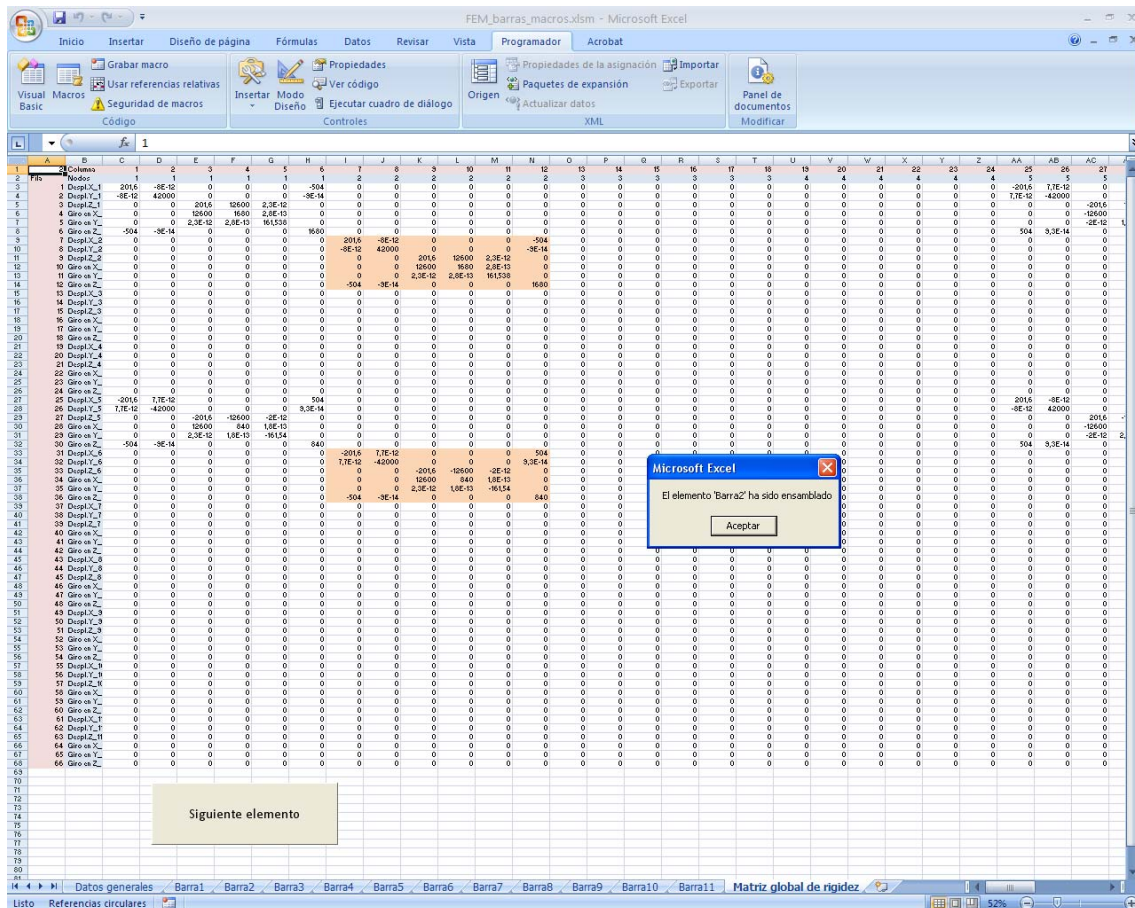


Figura 4: Pantalla "Matriz global..."- Met.Rigidez

2.7.5. Botón "Ensamblaje directo de K global"

Con este botón el usuario calcula la matriz de rigidez global de la estructura y la matriz global de fuerzas nodales de la estructura de forma directa sin parar en cada uno de los elementos. Con esta opción se pretende que el programa tenga otro aspecto más dinámico en el procedimiento del cálculo.

The screenshot displays the 'Matriz global de rigidez' (Global Stiffness Matrix) in Microsoft Excel. The spreadsheet is titled 'FEM_barras_macros.xlsm - Microsoft Excel'. The interface shows the Excel ribbon with various tabs: 'Inicio', 'Insertar', 'Diseño de página', 'Fórmulas', 'Datos', 'Revisar', 'Vista', 'Programador', and 'Acrobat'. The status bar at the bottom indicates 'Matriz global de rigidez' and '55%' zoom.

The spreadsheet contains a large matrix of values, likely representing the global stiffness matrix for a finite element model. The rows and columns are labeled with node numbers and degrees of freedom (DOFs). The matrix is symmetric, with non-zero values concentrated along the diagonal and in specific blocks corresponding to the elements of the structure.

Figura 5: Pantalla "Matriz global..." final- Met.Rigidez

2.7.6. Botón "Cálculo de K reducida"

Con este botón el usuario calcula la matriz de rigidez reducida de la estructura y la matriz global reducida de fuerzas nodales de la estructura de forma que establece el sistema de ecuaciones lineales a resolver. Además da a elegir al usuario como calcular este sistema de ecuaciones, calculando así los desplazamientos nodales desconocidos.

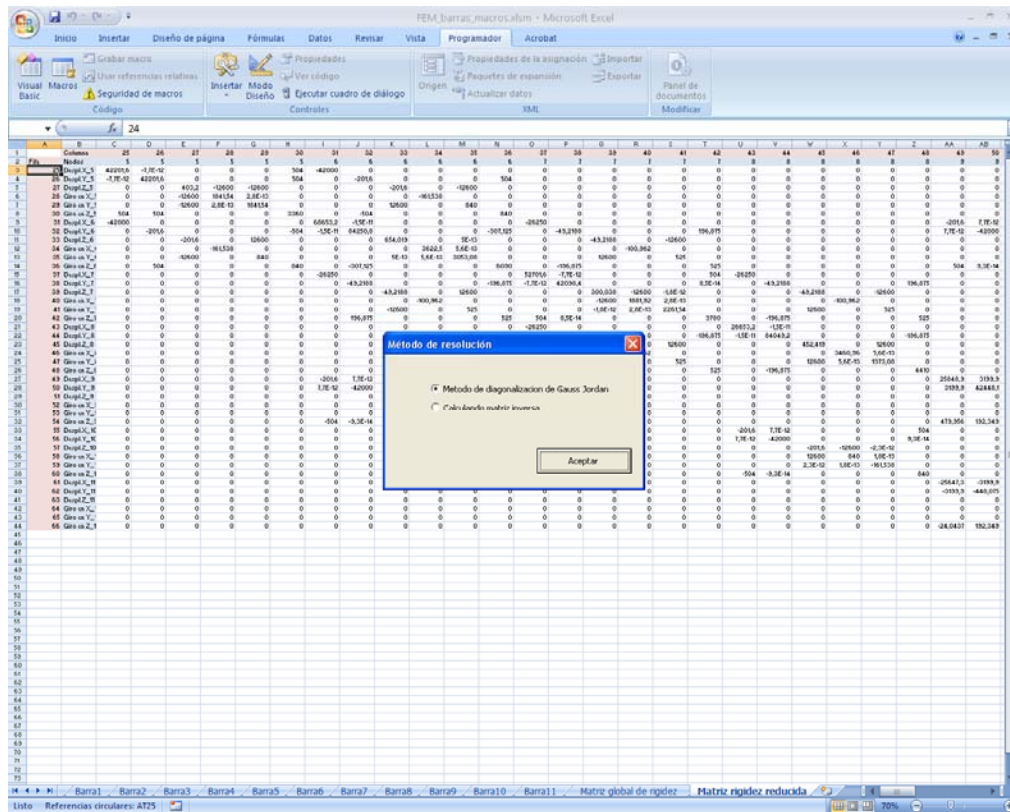


Figura 6: Pantalla "Matriz rigidez reducida"- Met.Rigidez

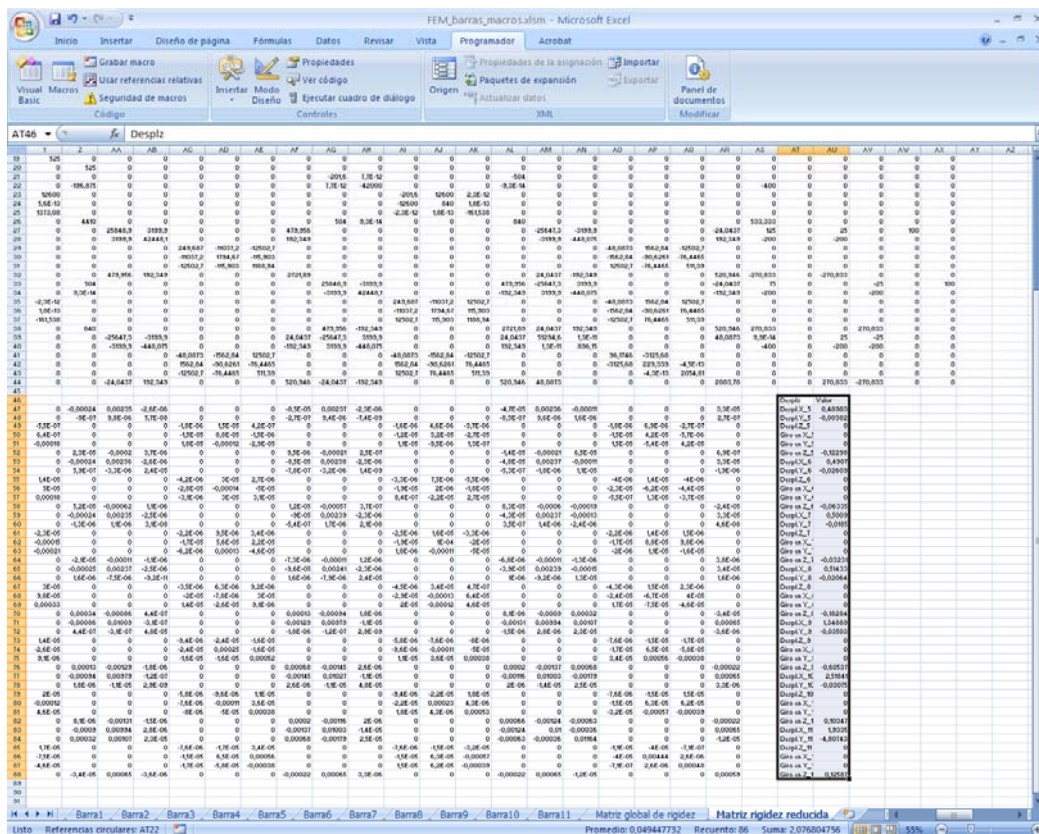


Figura 7: Pantalla "Matriz rigidez red." final- Met.Rigidez

2.7.7. Botón “Resultados en barras (solo plano XY)”

Con este botón el programa introduce los desplazamientos calculados en cada una de las hojas de las barras y calcula en ellas las fuerzas nodales en los nudos referidas al sistema global de referencia. Además aplica la matriz de giro para calcular estas fuerzas nodales en el sistema de referencia local.

A partir de aquí el programa genera una hoja que llama “Resultados” en las que se importan los datos de coordenadas iniciales y finales de cada uno de los nudos con el fin de graficar la estructura resultante.

A partir de los desplazamientos y giros nodales, con ayuda de los polinomios de extrapolación de Hermite se calculan los 4 polinomios que definen la deformada en función de los desplazamientos y giros de los nudos de cada barra, obteniendo así la deformada de la estructura.

A partir de las fuerzas nodales (axiles, cortantes y momentos) y de las fuerzas exteriores actuantes en las barras (en el caso de las hubiera) se calculan por el método clásico de obtención de esfuerzos en barras las leyes de esfuerzos axiles, cortantes y de momentos flectores.

Hay que destacar, que una vez calculadas las leyes, estas están referidas a los ejes locales de cada una de las barras, por lo que para graficarlas hay que hacer el consiguiente cambio de coordenadas explicado en apartados anteriores.

Además se generan botones interactivos en la hoja para poder graficar la ley que el usuario desee.

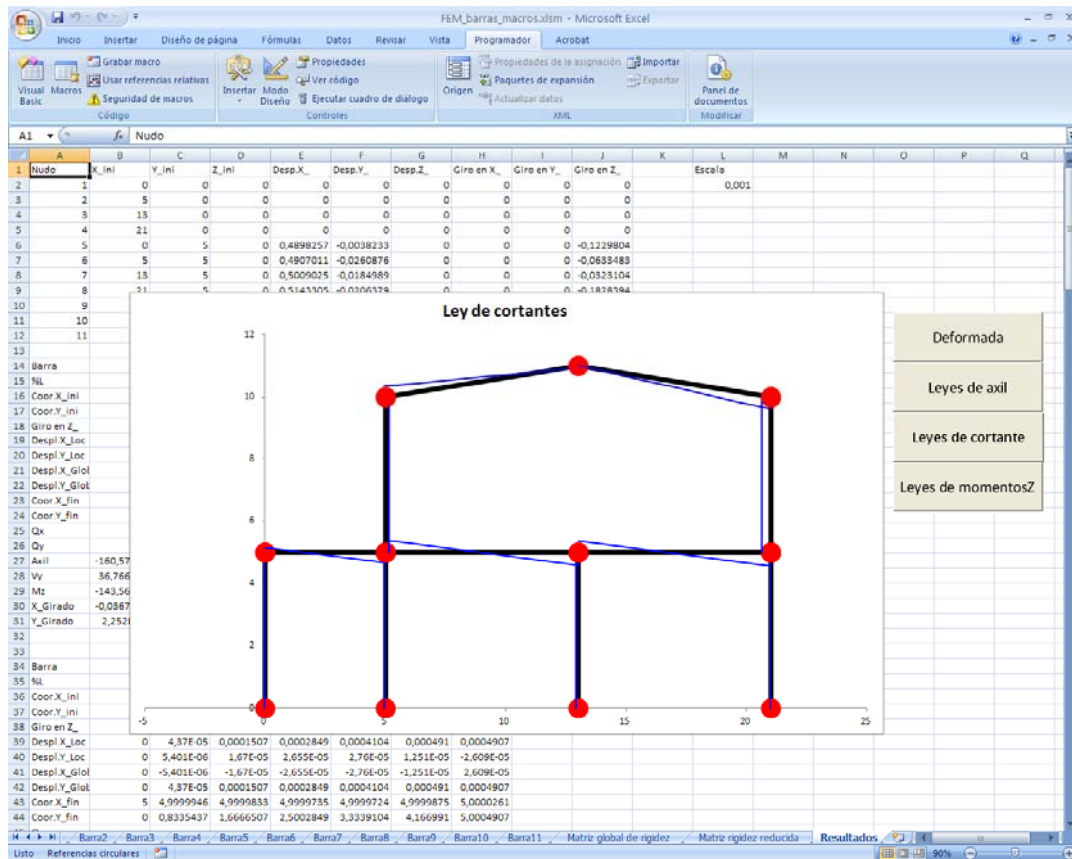


Figura 10: Pantalla "Resultados"-Cortantes- Met.Rigidez

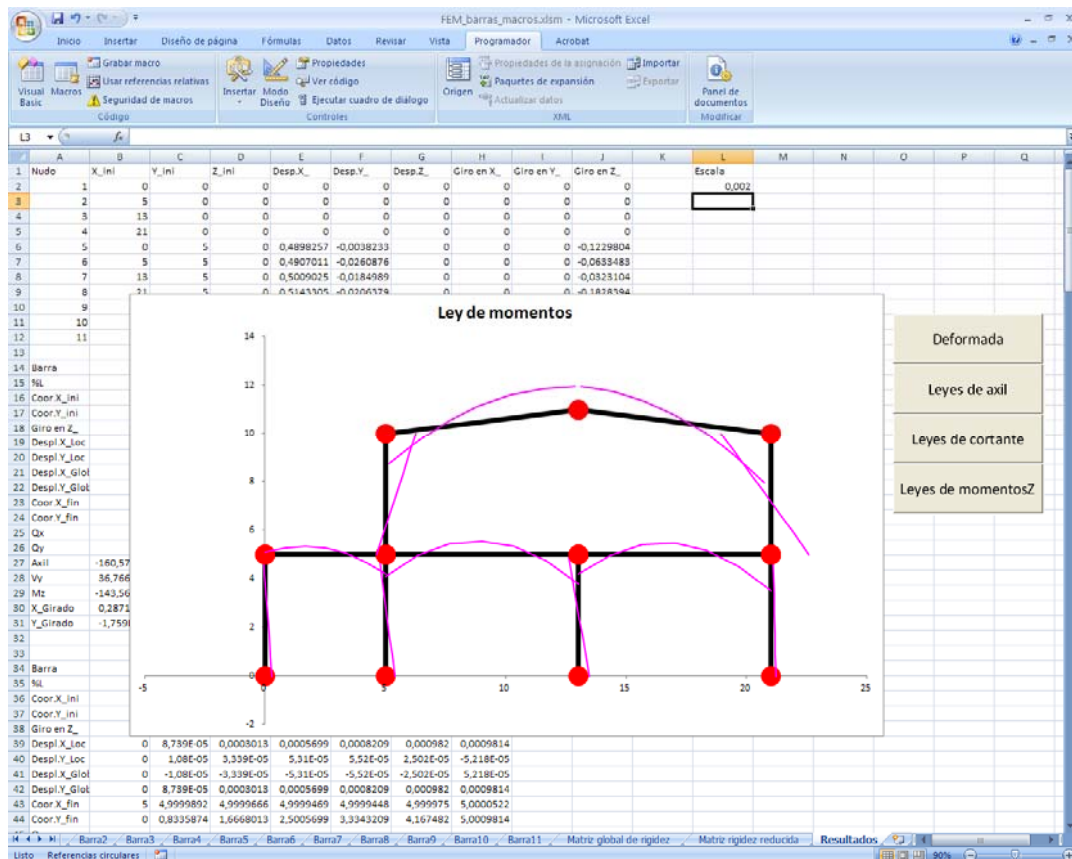


Figura 11: Pantalla "Resultados"-Mfletores- Met.Rigidez

CAPÍTULO 3: PROGRAMA DE CÁLCULO DE ELASTICIDAD LINEAL POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

3.1. INTRODUCCIÓN A LOS ELEMENTOS FINITOS Y SU HISTORIA

Los problemas de elasticidad bidimensional son muy frecuentes en Ingeniería, y son asimismo los primeros en los que se aplicó el MEF. En este caso el medio continuo que se analiza es plano, y se considera situado en el plano XY. Se denomina t al espesor del dominio en su dirección transversal, el cual se considera despreciable frente a las dimensiones del dominio en el plano XY.

La posición de un punto está definida por dos coordenadas (x,y) , y su deformación tiene dos componentes $u(x,y)$, $v(x,y)$ en las direcciones x,y respectivamente. El campo de deformaciones es por lo tanto un vector:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

Dentro de la elasticidad en dos dimensiones existen dos problemas diferentes:

- Tensión plana: cuando la tensión σ_z en sentido perpendicular al plano XY es cero, ya que el sólido puede dilatarse libremente en el sentido de su espesor. Por lo tanto existe una deformación unitaria ϵ_z no nula en dicha dirección.
- Deformación plana: cuando en el sentido del espesor del sólido no hay posibilidad de deformación, es decir $\epsilon_z=0$ por lo que se genera una tensión en dicha dirección σ_z no nula.

En ambos casos la tensión y la deformación en la dirección z no contribuyen a la energía elástica del sistema.

Las ecuaciones diferenciales que rigen el problema son de orden 2 en las deformaciones, pues contienen la derivada primera de las tensiones, que a su vez son derivadas de las deformaciones.

3.2. FUNCIONES DE FORMA

El campo de deformaciones en el interior del elemento se aproxima mediante la expresión habitual:

$$u = \sum N_i \cdot U_i \quad v = \sum N_i \cdot V_i$$

En forma matricial es:

$$u = N \cdot \delta^e$$

Las deformaciones nodales del elemento δ^e se agrupan en un vector columna:

$$\delta^e = (U_1 \ V_1 \ U_2 \ V_2 \ \dots \ U_n \ V_n)^T$$

siendo n el número de nudos del elemento. La matriz de funciones de forma N tiene 2 filas y tantas columnas como grados de libertad haya entre todos los nudos del elemento. La estructura de esta matriz siempre es la misma:

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n \end{pmatrix}$$

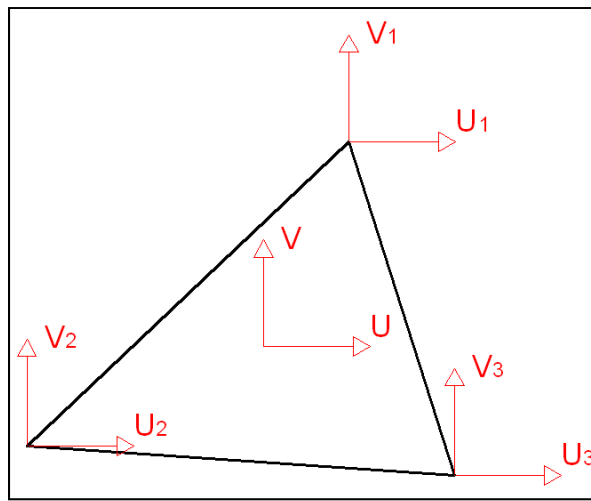


Ilustración 22: Desplazamientos nodales de un elemento

3.3. DEFORMACIONES UNITARIAS

Las deformaciones unitarias en un punto del elemento finito son:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Se pueden poner en la forma:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \partial u$$

donde se identifica al operador matricial ∂ que pasa de los desplazamientos u a las deformaciones unitarias. Sustituyendo los desplazamientos u en función de las deformaciones nodales, a través de las funciones de forma, se obtiene:

$$\varepsilon = \partial u = \partial N \cdot \delta^e = B \cdot \delta^e$$

Se identifica de esta forma la matriz B :

$$B = \partial N = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Esta matriz relaciona los desplazamientos de los nodos con las deformaciones unitarias en un punto cualquiera del elemento. Por lo tanto B representa el campo de deformaciones unitarias que se supone existe en el interior del elemento finito, como consecuencia de la hipótesis de interpolación de deformaciones efectuada.

Esta matriz se puede poner en la forma:

$$B = (B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_n)$$

Siendo cada una de las submatrices B_i :

$$B_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Nótese que debido a la estructura de B , las deformaciones unitarias en el interior del elemento se pueden poner en función de los desplazamientos nodales en la forma:

$$\epsilon_x = \sum \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot U_i \quad \epsilon_y = \sum \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot V_i \quad \gamma_{xy} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot U_i + \sum \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot V_i$$

3.4. TENSIONES. ECUACIÓN CONSTITUTIVA. ELEMENTOS TRIANGULARES

El estado de tensiones en dos dimensiones es:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

La ecuación constitutiva, en ausencia de temperaturas, es:

$$\sigma = D \cdot \epsilon$$

Para un material elástico lineal e isótropo la matriz elástica D es constante. Su expresión es diferente para los dos problemas de elasticidad plana.

- Tensión plana: En este caso la tensión en dirección transversal al material (z) es nula, pero éste es libre de dilatarse en dicha dirección:

$$\sigma_z = 0 \quad \epsilon_z \neq 0$$

Se parte de la ecuación constitutiva en el estado tridimensional:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}$$

Siendo:

$$\lambda = \frac{Eu}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)} \quad \mu = \frac{Eu}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

Imponiendo en la tercera ecuación la condición $\sigma_z = 0$ se obtiene:

$$\sigma_z = \lambda \cdot \epsilon_x + \lambda \cdot \epsilon_y + (\lambda + 2\mu) \cdot \epsilon_z = 0$$

De donde se calcula el valor de la deformación unitaria transversal al material:

$$\epsilon_z = \frac{-\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot (\epsilon_x + \epsilon_y)$$

Sustituyendo en la expresión inicial del estado tridimensional (y considerando además que $\tau_{yz}=0$, $\tau_{zx}=0$), se obtiene la matriz elástica del estado plano:

$$D_{Tensión\ plana} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}$$

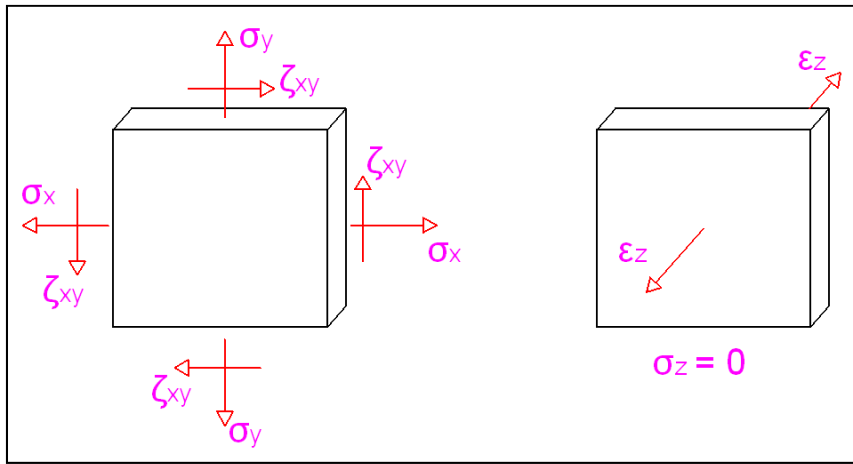


Ilustración 23: Estado tensional de tensión plana

- Deformación plana: En este caso la deformación unitaria transversal al material (z) es nula, ya que este es incapaz de dilatarse en dirección z. En consecuencia debe existir tensión en dicha dirección, es decir:

$$\sigma_z \neq 0 \quad \epsilon_z = 0$$

Para obtener la ecuación constitutiva es suficiente con hacer cero las deformaciones unitarias correspondientes en la ecuación tridimensional: basta por lo tanto con extraer las filas y columnas correspondientes al estado plano. De esta forma se obtiene la siguiente matriz elástica:

$$D_{Deformación\ plana} = \frac{E \cdot (1 - \nu)}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu} \end{pmatrix}$$

Nótese que aparece una tensión en la dirección z , cuyo valor se deduce simplemente de la ecuación en la dirección z :

$$\sigma_z = \frac{E\nu}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)} \cdot (\epsilon_x + \epsilon_y)$$

3.5. DETERMINACIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO TRIANGULAR DE TRES NODOS

Este elemento tiene seis desplazamientos en los nodos, que forman un vector:

$$\delta^e = (U_1 \quad V_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad U_3 \quad V_3)^T$$

Los desplazamientos de un punto cualquiera dentro del elemento se pueden representar en función de estos seis valores nodales, mediante una expresión polinómica. Dado que hay seis deformaciones nodales, el polinomio sólo podrá tener seis términos:

$$u = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y \quad v = a_4 + a_5 \cdot x + a_6 \cdot y$$

Estas expresiones pueden ponerse en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix}$$

$$U = R \cdot a$$

Los seis parámetros a_i se pueden calcular aplicando la expresión anterior a los tres nudos del elemento, y agrupando las seis ecuaciones obtenidas (dos en cada nudo):

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix}$$

es decir:

$$\delta^e = C \cdot a$$

Despejando a y sustituyendo en la expresión de u se obtiene:

$$u = R \cdot C^{-1} \cdot \delta^e$$

Esta expresión define las funciones de forma como:

$$N = R \cdot C^{-1}$$

Efectuando el producto de matrices anterior se obtiene la expresión:

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{pmatrix}$$

Las tres funciones de forma correspondientes a los tres nudos son:

$$N_1 = \frac{a_1 + b_1 \cdot x + c_1 \cdot y}{2A} \quad N_2 = \frac{a_2 + b_2 \cdot x + c_2 \cdot y}{2A} \quad N_3 = \frac{a_3 + b_3 \cdot x + c_3 \cdot y}{2A}$$

Las distintas constantes dependen de la geometría del elemento:

$$a_1 = x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 \quad b_1 = y_2 - y_3 \quad c_1 = x_3 - x_2$$

$$a_2 = x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 \quad b_2 = y_3 - y_1 \quad c_2 = x_1 - x_3$$

$$a_3 = x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \quad b_3 = y_1 - y_2 \quad c_3 = x_2 - x_1$$

En la ecuación anterior, A es el área del elemento, cuyo valor se obtiene mediante el determinante:

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Se observa que si el elemento tiene área nula (dos nudos coincidentes) eso se manifiesta en $A=0$ y no se pueden calcular las N_i . Estas funciones son planos de valor 1 en el nudo i y 0 en los otros dos nudos.

Al ser las tres funciones de forma planas, el campo de desplazamientos en el interior del elemento es también un plano que pasa por los tres valores nodales del desplazamiento. En consecuencia, si se emplea este elemento, el campo de deformaciones en una dirección cualquiera u o v se aproxima mediante una superficie poliédrica de facetas triangulares.

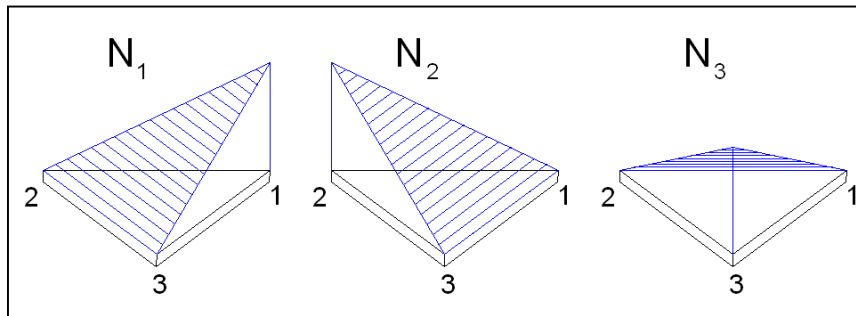


Ilustración 24: Funciones de aprox. del elemento triangular

El estado de deformación unitaria viene definido por la matriz B , que en este caso toma el valor:

$$B = \partial N = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Efectuando las derivadas, la expresión de esta matriz es:

$$B = \frac{1}{2A} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se puede poner en la forma:

$$B = (B_1 \quad B_2 \quad B_3)$$

Se observa que la matriz B es constante, y no depende de x , y . Por lo tanto las deformaciones unitarias ϵ son constantes en todo el elemento, y también lo serán las tensiones, que son proporcionales a ellas.

La matriz de rigidez del elemento se obtiene a partir de su expresión general.

Dada la estructura de B, se puede poner en la forma:

$$K = \int B^T \cdot D \cdot B \, dv = \int \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \cdot D \cdot (B_1 \quad B_2 \quad B_3) \cdot t \cdot dx \cdot dy = B^T \cdot D \cdot B \cdot A \cdot t$$

siendo t el espesor del elemento. La matriz K se puede dividir en 3x3 submatrices, que relacionan a los tres nudos entre sí:

$$K = \begin{pmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} \\ K^{31} & K^{32} & K^{33} \end{pmatrix}$$

Cada una de ellas tiene la expresión:

$$K^{ij} = \int B_i^T \cdot D \cdot B_j \cdot t \cdot dx \cdot dy$$

Dado que B_i y D son constantes, su valor resulta ser directo (suponiendo espesor t uniforme):

$$K^{ij} = \frac{t}{4A} \begin{pmatrix} b_i b_j D_{11} + c_i c_j D_{33} & b_i c_j D_{12} + c_i b_j D_{33} \\ c_i b_j D_{12} + b_i c_j D_{33} & c_i c_j D_{11} + b_i b_j D_{33} \end{pmatrix}$$

donde D_{ij} son los coeficientes de la matriz elástica D .

3.6. DETERMINACIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN ELEMENTO RECTANGULAR DE CUATRO NODOS

Este elemento tiene ocho desplazamientos en los nodos, que forman un vector:

$$\delta^e = (U_1 \quad V_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad U_3 \quad V_3 \quad U_4 \quad V_4)^T$$

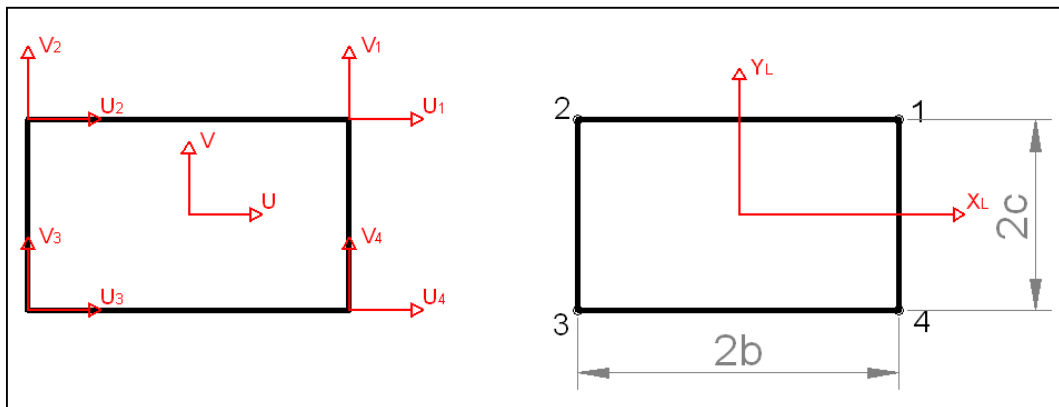


Ilustración 25: Desplazamientos nodales de un elemento de 4 nodos

Los desplazamientos de un punto cualquiera dentro del elemento se pueden representar en función de estos ocho valores nodales, mediante una expresión polinómica. Dado que hay ocho deformaciones nodales, el polinomio sólo podrá tener ocho términos:

$$u = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot xy \quad v = a_5 + a_6 \cdot x + a_7 \cdot y + a_8 \cdot xy$$

Estas expresiones pueden ponerse en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{pmatrix}$$

$$U = R \cdot a$$

Los seis parámetros a_i se pueden calcular aplicando la expresión anterior a los tres nudos del elemento, y agrupando las seis ecuaciones obtenidas (dos en cada nudo):

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & xy_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 & xy_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & xy_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 & xy_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & xy_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 & xy_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{pmatrix}$$

es decir:

$$\delta^e = C \cdot a$$

Despejando a y sustituyendo en la expresión de u se obtiene:

$$u = R \cdot C^{-1} \cdot \delta^e$$

Esta expresión define las funciones de forma como:

$$N = R \cdot C^{-1}$$

Efectuando el producto de matrices anterior se obtiene la expresión:

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{pmatrix}$$

Las tres funciones de forma correspondientes a los tres nudos son:

$$N_1 = \frac{(b+x) \cdot (c+y)}{A}$$

$$N_2 = \frac{(b-x) \cdot (c+y)}{A}$$

$$N_3 = \frac{(b-x) \cdot (c-y)}{A}$$

$$N_4 = \frac{(b+x) \cdot (c-y)}{A}$$

Siendo el aspecto de dos de estas funciones:

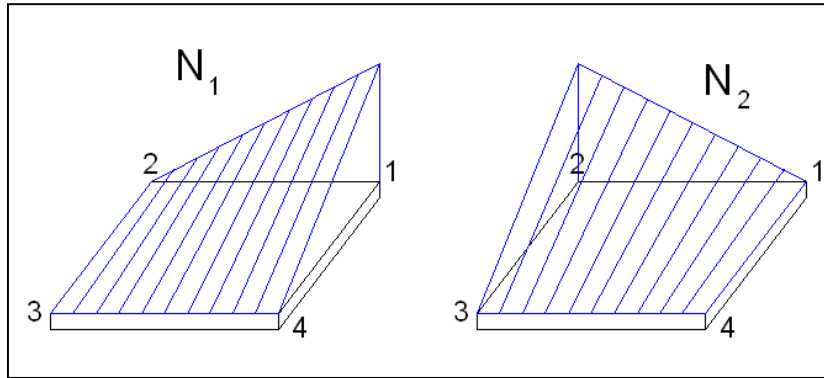


Ilustración 26: Funciones de aproximación de un elemento rectangular de 4 nodos

El estado de deformación unitaria viene definido por la matriz B , que en este caso toma el valor:

$$B = \partial N = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Efectuando las derivadas, la expresión de esta matriz es:

$$B = \frac{1}{A} \cdot \begin{pmatrix} (c+y) & 0 & -(c+y) & 0 & -(c-y) & 0 & (c-y) & 0 \\ 0 & (b+x) & 0 & (b-x) & 0 & -(b-x) & 0 & -(b+x) \\ (b+x) & (c+y) & (b-x) & -(c+y) & (b-x) & -(c-y) & -(b+x) & (c-y) \end{pmatrix}$$

Esta matriz se puede poner en la forma:

$$B = (B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4)$$

Se observa que esta matriz tiene términos lineales, por lo que ésta es la variación permitida para el campo de deformaciones unitarias en el interior del elemento. De la misma forma, las tensiones también pueden tener una variación lineal en el elemento. Este elemento es por lo tanto bastante más preciso que el triangular, que sólo permitía valores constantes de la tensión y la deformación unitaria.

La matriz de rigidez del elemento se obtiene a partir de su expresión general.

Dada la estructura de B, se puede poner en la forma:

$$K = \int B^T \cdot D \cdot B \, dv = \int \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} \cdot D \cdot (B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4) \cdot t \cdot dx \cdot dy = B^T \cdot D \cdot B \cdot A \cdot t$$

siendo t el espesor del elemento. La matriz K se puede dividir en 4x4 submatrices, que relacionan a los cuatro nudos entre sí:

$$K = \begin{pmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} & K^{14} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} & K^{24} \\ K^{31} & K^{32} & K^{33} & K^{34} \\ K^{41} & K^{42} & K^{43} & K^{44} \end{pmatrix}$$

Cada una de ellas tiene la expresión:

$$K^{ij} = \int B_i^T \cdot D \cdot B_j \cdot dv = \int B_i^T \cdot D \cdot B_j \cdot t \cdot dx \cdot dy$$

Formulación isoparamétrica:

Existen muchos casos en los que por cuestiones de geometría el mallado no puede quedar con elementos rectangulares con aristas a 90° y con aristas alineadas con los ejes de coordenadas X e Y. Para que esto no sea un problema, usaremos la formulación isoparamétrica, que consiste en definir alguna relación entre las coordenadas de un punto en el sistema local y las mismas en el sistema general:

$$x = f(\xi, \eta) \quad y = g(\xi, \eta)$$

Esta transformación de coordenadas define la forma del elemento en el sistema cartesiano.

Interpolación de coordenadas:

Para definir la relación entre coordenadas locales y generales anterior usaremos las mismas funciones de interpolación que se utilizaron para el campo de deformaciones dentro del elemento (por eso se le llama formulación isoparamétrica).

$$x = \sum_{1,n} N_i' x_i \quad y = \sum_{1,n} N_i' y_i$$

donde N' son funciones de interpolación definidas en las coordenadas locales (ξ, η) . Estas N' deben de valer 1 en el nudo i y cero en los demás.

A partir de aquí y sabiendo que la matriz de rigidez de un elemento cualquiera es:

$$K^{ij} = \int B_i^T \cdot D \cdot B_j \cdot dv = \int B_i^T \cdot D \cdot B_j \cdot t \cdot dx \cdot dy$$

En esta expresión aparece la matriz B , que se obtiene derivando la matriz de funciones de interpolación N respecto a las coordenadas x e y . Sin embargo, la matriz N está definida en las coordenadas locales normalizadas del elemento (ξ, η) , por lo que es necesario transformar las derivadas entre unas coordenadas y otras. Una vez obtenida la matriz B hay que efectuar la integral anterior al dominio de todo el elemento.

Para resolver este problema lo que se hace es evaluar la integral anterior en coordenadas locales (ξ, η) , pasando todas las expresiones necesarias a dichas coordenadas. En la expresión de la matriz B se observa que es necesario disponer de todas las derivadas de las funciones de interpolación respecto a las coordenadas generales x, y .

Siguiendo las reglas de la derivación se puede poner la siguiente relación matricial entre las derivadas en ambos sistemas de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = J \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}$$

La matriz J es la Jacobiana de la transformación de coordenadas (x, y) a (ξ, η) . Despejando se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

El vector de la derecha es conocido sin más que derivar las N_i respecto a (ξ, η) , y conociendo J se pueden obtener de la expresión anterior todas las derivadas que forman la matriz B_i .

- El cálculo de J se hace apoyándose en la interpolación de coordenadas:

$$J = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}$$

Esta expresión puede ser evaluada fácilmente ya que las funciones N son conocidas en función de (ξ, η) y x_i, y_i son las coordenadas de los nudos que definen la forma del elemento.

- El dominio de integración expresado en coordenadas locales es:

$$dv = t \cdot dx \cdot dy = t \cdot J \cdot d\xi \cdot d\eta$$

donde aparece el determinante J de la matriz Jacobiana, que se calcula a partir de la expresión de ésta, y es en general una función de (ξ, η) .

Como hemos dicho anteriormente La matriz K se puede dividir en 4x4 submatrices, que relacionan a los cuatro nudos entre sí:

$$K = \begin{pmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} & K^{14} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} & K^{24} \\ K^{31} & K^{32} & K^{33} & K^{34} \\ K^{41} & K^{42} & K^{43} & K^{44} \end{pmatrix}$$

Cada una de las submatrices tiene la expresión:

$$K^{ij} = \int B_i^T \cdot D \cdot B_j \cdot dv = \int B_i^T \cdot D \cdot B_j \cdot t \cdot J \cdot d\xi \cdot d\eta$$

Sustituyendo los valores de las distintas matrices se obtiene:

$$K^{ij} = \int \begin{bmatrix} D_{11} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + D_{33} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} & D_{12} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + D_{33} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ D_{12} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} + D_{33} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} & D_{11} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + D_{33} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot t \cdot J \cdot d\xi \cdot d\eta$$

Integración numérica:

La integral de una función cualquiera (matriz de rigidez) sobre el dominio de coordenadas naturales de un elemento cuadrilátero puede evaluarse por una cuadratura de Gauss-Legendre bidimensional como:

$$I = \iint_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta$$

siendo

$$f(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} D_{11} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + D_{33} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} & D_{12} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + D_{33} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ D_{12} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} + D_{33} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} & D_{11} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + D_{33} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{bmatrix}$$

si

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) \cdot d\xi = \sum_{i=1,n} H_i \cdot f(\xi_i, \eta) = g(\eta)$$

entonces

$$I = \int_{-1}^{+1} g(\eta) \cdot d\eta = \sum_{j=1,n} H_j \cdot g(\eta_j) = \sum_{i=1,n} \sum_{j=1,n} H_i \cdot H_j \cdot f(\xi, \eta)$$

siendo H_i y H_j las coordenadas de los puntos de integración en el sistema de coordenadas naturales ($\pm 0.577, \pm 0.577$).

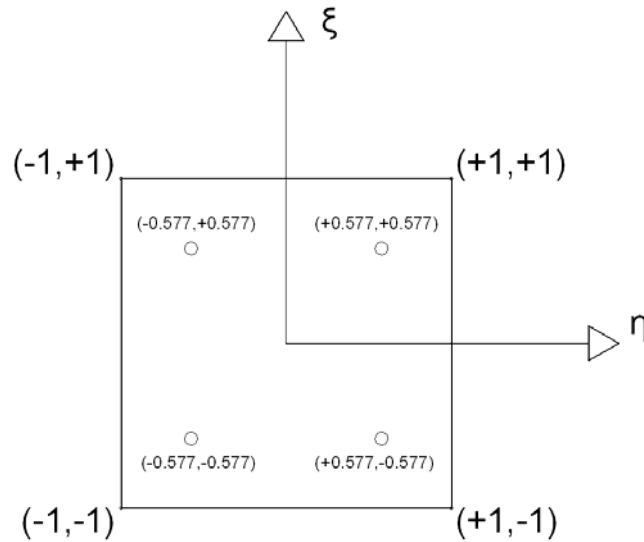


Ilustración 27: Elemento rectangular de 4 nodos

3.7. CÁLCULO DE TENSIONES Y DEFORMACIONES

El estado de tensiones en un punto cualquiera del elemento es:

$$\sigma = D \cdot \varepsilon = D \cdot B \cdot \delta^e$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{pmatrix} \cdot B_{elem} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \vdots \\ U_n \\ V_n \end{pmatrix}$$

Que de forma directa para un elemento triangular de 3 nodos es:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2A} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

Se observa que en este caso el estado de tensiones no depende de las coordenadas x , y sino que es uniforme en todo el elemento e igual al valor calculado en el único punto de integración de este elemento y que está situado en el centroide de este. Por lo tanto, si se emplea este elemento el campo de tensiones en el material se aproxima mediante una serie de valores constantes, formando una superficie escalonada. En consecuencia este tipo de elemento

sólo debe utilizarse con mallados muy finos si se prevé un campo de tensiones variable.

En el caso de elementos rectangulares tenemos 4 puntos de integración, por lo que el campo de tensiones no será constante en todo el elemento y tendrá valores diferentes en cada uno de los estos puntos.

Para calcular las deformaciones (en los mismos puntos de integración) solo hay que multiplicar la matriz de tensiones por la inversa de la matriz D:

$$\sigma = D \cdot \varepsilon \rightarrow \varepsilon = D^{-1} \cdot \sigma$$

A partir de las matrices de tensiones y de rigidez es inmediato calcular los valores propios de dichas matrices para calcular las tensiones y deformaciones principales en cada uno de los puntos de integración. A la vez, y una vez calculadas esas tensiones principales, podemos calcular la tensión de Von Mises mediante la expresión:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - (\sigma_1 \cdot \sigma_2)}$$

Suavizado de tensiones y deformaciones

Como se ha comentado anteriormente, los valores de tensiones y deformaciones son calculados en las coordenadas en las que están situados los puntos de integración, pero para poder expresar gráficamente los resultados, tal y como se hace con los desplazamientos debemos de saber los valores de tensiones y deformaciones en los nodos, por lo que para cada elemento deberemos hacer una extrapolación de esos valores en los puntos de integración ayudándonos de las funciones de forma.

En el caso del elemento triangular esta operación resulta trivial, ya que hemos dicho que al tener un solo punto de integración los valores son constantes para todo el elemento.

En el caso del elemento rectangular nos tendremos que ayudar de esas funciones de forma para poder expresar los valores en los nodos.

Una vez obtenidos los valores en los nodos de cada elemento, podemos ver que para un mismo nodo compartido por varios elementos, el valor de una misma variable no es el mismo, aunque si parecido. Para poder listar unos resultados congruentes haremos lo que se denomina un suavizado de tensiones o deformaciones en los nodos, que no es más que calcular la media aritmética de cada uno de los valores de cada elemento en un mismo nodo.

3.8. PROCEDIMIENTO EN EL ANÁLISIS POR ELEMENTOS FINITOS

3.8.1. Identificación estructural

En esta primera parte se definirá la estructura a base de datos y números.

- En primer lugar se definen como ejes globales para toda la estructura los ejes X, Y y Z.
- Posteriormente se definen cada uno de los nodos que conformarán la estructura, definiendo sus coordenadas en referencia a los ejes globales.
- Conectividad de los elementos, se identifica para cada elemento los nodos que lo componen (3 para elementos triangulares y 4 para elementos rectangulares).
- Se definirán también los materiales y espesores, de forma que a cada elemento se le deba asignar un tipo de material y un espesor determinado.
- También se definirán las condiciones de contorno, definiendo en los nudos que lo requieran el desplazamiento en cada uno de los ejes X e Y.
- Por último se definen las cargas que actuarán en la estructura, debiendo estas ser aplicadas en los nodos de forma puntual.

3.8.2. Matriz de rigidez

Se forma la matriz de rigidez de cada una de los elementos, teniendo en cuenta lo expuesto en los puntos anteriores de "3.5. Determinación de la matriz de rigidez de un elemento triangular de tres nodos" y "3.6. Determinación de la matriz de rigidez de un elemento rectangular de cuatro nodos".

Para construir la matriz de rigidez global de la estructura es necesario construir la matriz de rigidez k de cada elemento y posteriormente ensamblar todas ellas.

La matriz k para cada elemento está dada por:

$$K = \int B^T \cdot D \cdot B \, dv$$

Donde B es una matriz que depende de cada tipo de elemento ya que está definida por las derivadas parciales de las funciones de forma con respecto a X e Y (las funciones de forma cambian para cada tipo de elemento como se presento anteriormente), la matriz B queda definida por:

$$B = \partial N = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Y D es la matriz de constantes elásticas definida a partir del modulo de Young (E) y el coeficiente de Poisson (ν) .

Matriz D para elasticidad bidimensional y tensión plana es:

$$D_{\text{Tensión plana}} = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{pmatrix}$$

El procedimiento de ensamblaje de la matriz global de rigidez ha sido explicado ya en el apartado "2.6.5. Matriz global de rigidez de la estructura".

3.8.6. Matriz de cargas globales de la estructura

Ver apartado "2.6.6. Matriz de cargas globales de la estructura".

3.8.7. Condiciones de contorno y cálculo de desplazamientos desconocidos

Ver apartado "2.6.7. Condiciones de contorno y cálculo de desplazamientos desconocidos".

3.8.8. Métodos de resolución del sistema de ecuaciones

Ver apartado "Métodos de resolución del sistema de ecuaciones".

3.8.9. Cálculo de tensiones y deformaciones por elemento y suavizado de los valores en los nodos

Tal y como se explica en "3.7. Cálculo de tensiones y deformaciones", en esta parte de las aplicaciones (en nuestro caso, solo implementado en la aplicación de Matlab), una vez calculados los desplazamientos en los nodos, a través de la matriz B de cada elemento, se calculan en estos las tensiones y las deformaciones. Como se ha explicado, estos valores son calculados en los puntos de integración teniendo un punto los elementos triangulares y cuatro los

elementos rectangulares. Es por ello que en los primeros, los valores de tensión y deformación son constantes en todo el elemento y en los segundos no.

Una vez calculados estos, necesitamos extrapolar esos valores a cada uno de los nodos, siendo un proceso trivial en los elementos triangulares y teniendo que volver a usar las funciones de forma en los elementos rectangulares.

Por último, teniendo ya los valores de cada elemento para todos sus nodos, debemos calcular la media aritmética de los valores en todos aquellos nodos que sean compartidos por dos o más elementos.

3.9. PROGRAMA DE CÁLCULO POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

3.9.1. Introducción al programa y lenguaje de programación

Este proyecto consiste en el desarrollo de una hoja de cálculo de Microsoft Excel interactiva con macros implementadas para el análisis de elasticidad bidimensional por el método de los elementos finitos. Se ha desarrollado una hoja de cálculo para cada uno de los elementos estudiados:

- Elementos triangulares de 3 nodos
- Elementos rectangulares de 4 nodos

El programa permitirá al usuario realizar este análisis para estructuras con el número de nodos correspondiente a 256 elementos, para lo que el usuario sólo tendrá que ingresar los datos de, valores de cargas externas, número de nodos con sus coordenadas, número de elementos y que nodos los definen, condiciones de contorno, coeficientes de materiales y espesores que serán aplicables a cada una de los elementos.

Una vez ingresados los datos y pulsando los botones adecuados, las hojas de cálculo realizarán un análisis paso por paso.

En primer lugar el usuario deberá calcular las matrices de rigidez de cada uno de los elementos, así como las matrices de cargas en los nodos.

Una vez realizado este paso, mediante otro botón, el usuario deberá ensamblar las matrices de rigidez y de fuerzas nodales de toda la estructura, quedando así relacionadas las rigideces, con las fuerzas exteriores y con los desplazamientos.

El siguiente paso será calcular la matriz ensamblada reducida, quitando aquellas filas y columnas cuyos desplazamientos y/o giros estén prescritos, lo cual nos dejará un sistema de ecuaciones lineales por resolver. En este mismo paso la hoja de cálculo resolverá el sistema calculando la matriz inversa, ya que el

método de eliminación de Gauss-Jordan requiere mucho más tiempo de computación y en ocasiones el programa se cuelga.

Por último, una vez calculados los desplazamientos nodales desconocidos en cada uno de los nodos se pueden calcular las tensiones y deformaciones principales en cada uno de los elementos.

Es importante destacar, que por la complicación que conllevaba su programación el usuario solo podrá obtener resultados gráficos en las hojas Excel de los desplazamientos resultantes del cálculo. Se ha considerado que realizar un mapa de tensiones y deformaciones en este entorno de programación no merecía la pena ya que existen otros entornos mucho más potentes y con más posibilidades gráficas.

Para ello, y así no dejar sin resultados visibles el trabajo realizado en este apartado, se ha realizado otro software en Matlab de cálculo directo de cada uno de los casos, en los que sí que se implementan los correspondientes mapas de desplazamientos, tensiones y deformaciones.

Además para la introducción de datos también se ha programado un código de manera que sea el software "Autocad" el que haga de preprocesador, donde se definan gráficamente los elementos con sus nodos, las condiciones de contorno, las cargas, los espesores y los materiales. Este programa en autocad exportará un archivo "inp" en el que se describirá totalmente la estructura de forma que pueda ser importado desde los programas realizados en este trabajo (Hojas Excel, Programa en Matlab) y además puede ser importado desde Abaqus, para poder comprobar los resultados.

El lenguaje de programación empleado es el que lleva implementado Microsoft Excel 2007 y Autocad para realizar sus macros. Este lenguaje es "Visual Basic for Applications". Para la parte de Matlab el lenguaje utilizado es el propio de este programa de matemáticas.

3.9.2. Pantalla inicial de introducción de datos

Como se puede ver en la imagen, el usuario puede navegar por la hoja "Datos Generales" en los que se deben introducir coherentemente los datos de la estructura. Con los 5 botones superiores se puede navegar por esta misma hoja para no tener que estar desplazándose con la barra de la parte inferior derecha.

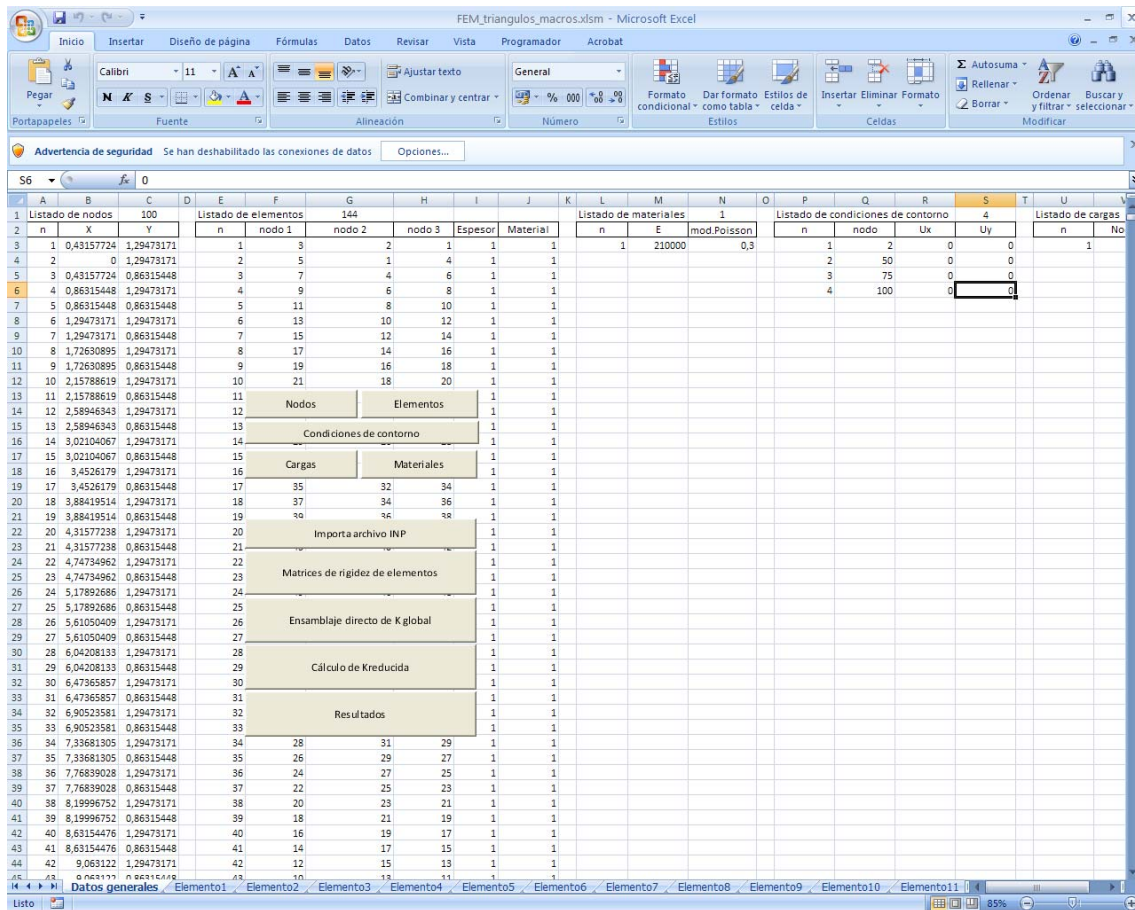


Figura 12: Pantalla "Datos Generales" - EF2D

3.9.3. Botón "Importar archivo INP"

La primera labor para el cálculo por este método consiste en la definición de geometría, de la malla, las condiciones de contorno y asignación de propiedades a los materiales y cargas. A todo este conjunto de operaciones se le denomina preproceso y generalmente, todos los programas comerciales tienen un "preprocesador" más o menos potentes para agilizar al usuario esta tarea.

Con el fin de prestar ese mismo servicio al usuario y así agilizar el trabajo inicial del cálculo, se ha desarrollado en este trabajo una aplicación que exportará un archivo de texto con extensión "inp" en el que se contenga todos los datos de la estructura a calcular. La ventaja de esta aplicación radicará no solo en que agiliza el trabajo al usuario y que puede ser importado por las hojas Excel programadas y por la aplicación de Matlab, si no que puede ser importada por Abaqus para poder comprobar los resultados de cada una de las aplicaciones desarrolladas.

Antes de describir el botón de "Importar Archivo INP", procederemos a explicar la aplicación desarrollada en Autocad.

Una vez abierto el programa "Autocad", deberemos dibujar nuestra malla con polilíneas (3 vértices si son elementos triangulares y 4 si son rectangulares) en la capa "Elementos". En las capas "Apoyos" y "Cargas" deberemos introducir unos bloques definiendo las condiciones de contorno y las cargas en los nodos que correspondan.

Una vez realizado este trabajo (ágil), se abre la aplicación desarrollada apareciendo la siguiente ventana:

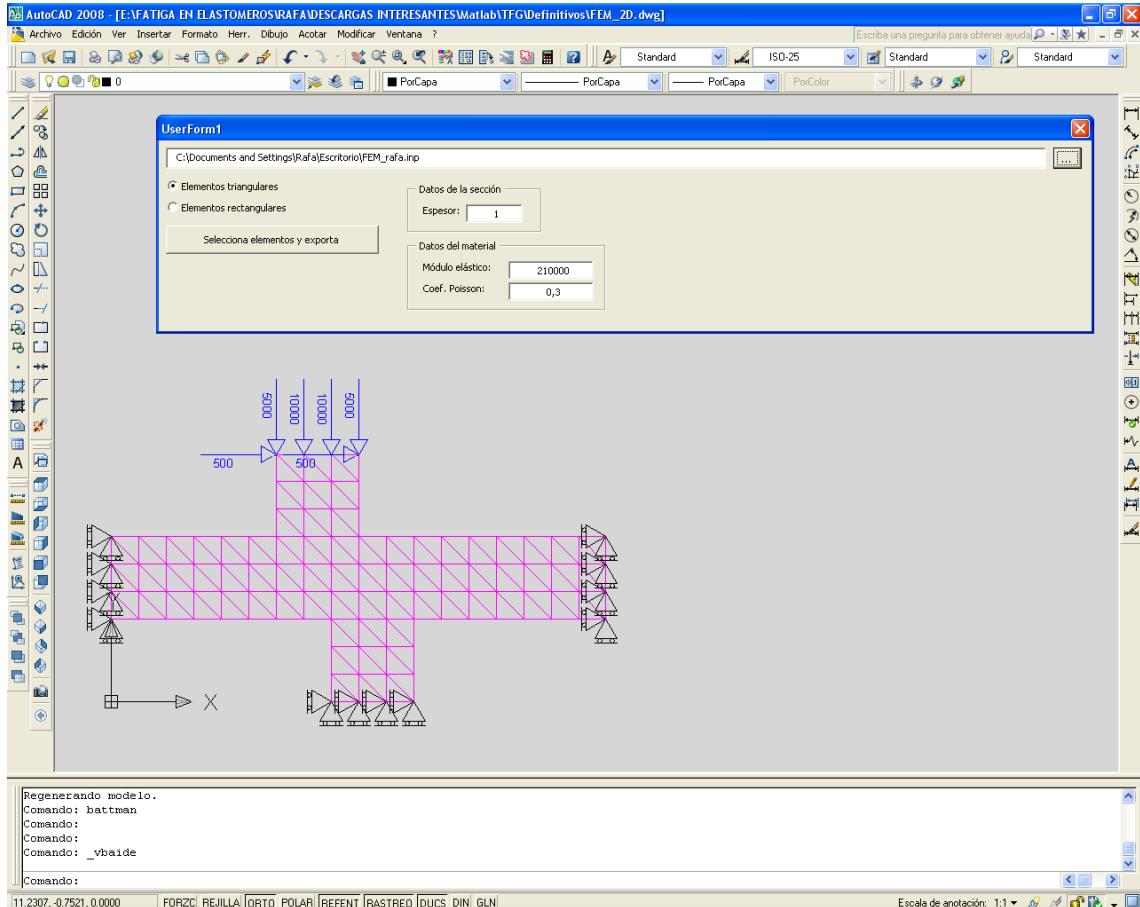


Figura 13: Pantalla Aplicación Autocad - EF2D

Como se puede ver en la imagen, el usuario deberá especificar en qué ruta desea guardar el archivo "inp", definir si los elementos van a ser triangulares o rectangulares, el espesor de estos y las propiedades del material a emplear. Una vez realizado esto, podrá pulsar el botón y seleccionar los elementos, cargas y condiciones de contorno que desee exportar. El resultado, como hemos comentado anteriormente es un archivo de texto del tipo que se muestra en la siguiente figura:

```

FEM_rafa.inp : WordPad
Archivo Edición Ver Insertar Formato Ayuda

|Heading
** Job name: Job-1 Model name: Model-1
** Generated by: Rafa for Abaqus/CAE 6.11-3
**Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO
**
** PARTS
**
*Part, name=Part-1
*Node
1, 3.884195141, 1.294731713
2, 3.452617903, 1.294731713
3, 3.884195141, 0.863154475
4, 4.315772379, 1.294731713
5, 4.315772379, 0.863154475
6, 4.747349617, 1.294731713
7, 4.747349617, 0.863154475
8, 2.157886189, 2.589463427
9, 1.726308951, 2.589463427
10, 2.157886189, 2.157886189
11, 2.589463427, 2.589463427
12, 2.589463427, 2.157886189
13, 3.021040665, 2.589463427
14, 3.021040665, 2.157886189
15, 3.452617903, 2.589463427
16, 3.452617903, 2.157886189
17, 3.884195141, 2.589463427
18, 3.884195141, 2.157886189
19, 4.315772379, 2.589463427
20, 4.315772379, 2.157886189
21, 4.747349617, 2.589463427
22, 4.747349617, 2.157886189
23, 5.176926855, 2.589463427
24, 5.176926855, 2.157886189
25, 5.610504093, 2.589463427
26, 5.610504093, 2.157886189
27, 6.042081331, 2.589463427
28, 6.042081331, 2.157886189
29, 6.473658569, 2.589463427
30, 6.473658569, 2.157886189
31, 6.905235807, 2.589463427
32, 6.905235807, 2.157886189
33, 7.336813045, 2.589463427
34, 7.336813045, 2.157886189
35, 7.768390283, 2.589463427
36, 7.768390283, 2.157886189
37, 0.431577237, 2.589463427
38, 0.000000000, 2.589463427
39, 0.431577237, 2.157886189
40, 0.863154475, 2.589463427
41, 0.863154475, 2.157886189
42, 1.294731713, 2.589463427
43, 1.294731713, 2.157886189
44, 1.726308951, 2.157886189
45, 3.021040665, 3.884195141
46, 2.589463427, 3.884195141
47, 3.021040665, 3.452617903
48, 3.452617903, 3.884195141
49, 3.452617903, 3.452617903

```

Figura 14: Pantalla Archivo INP - EF2D

Ahora sí que se puede pulsar el botón de de “Importar Archivo INP” de la hoja de cálculo e importar todos los datos.

3.9.4. Botón “Matrices de rigidez de elementos”

Con este botón el usuario calcula las matrices de rigidez y cargas de cada uno de los elementos. Para ello el programa crea una hoja para cada uno de ellos en las que importa los datos que definen el elemento, y calcula matriz de rigidez y matriz de cargas nodales. El resultado obtenido de pulsar este botón se muestra en la hoja “Elemento+nº”, y que se puede ver en la siguiente imagen.

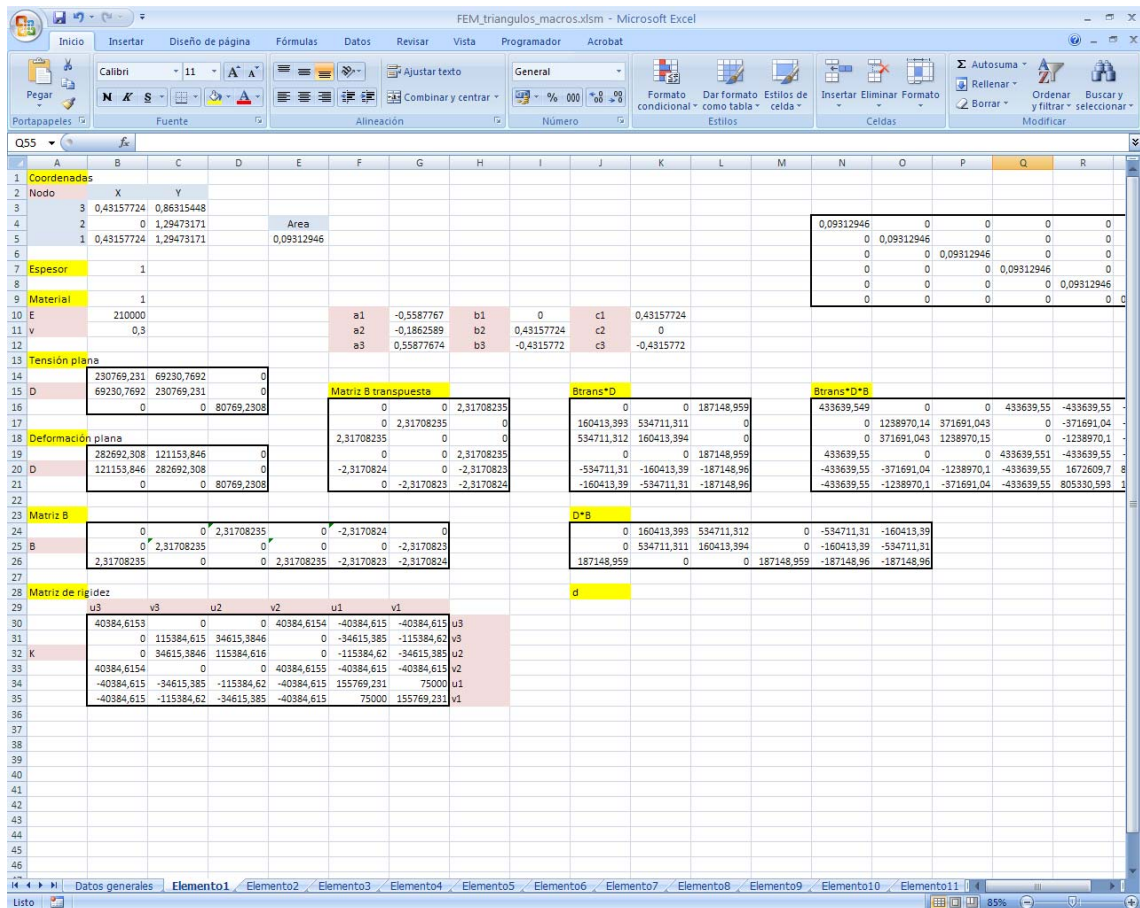


Figura 15: Pantalla "Elemento" - EF2D

3.9.5. Botón “Ensamblaje directo de K global”

Con este botón el usuario calcula la matriz de rigidez global de la estructura y la matriz global de fuerzas nodales de la estructura de forma directa sin parar en cada uno de los elementos.

Figura 16: Pantalla "Matriz global rigidez" - EF2D

3.9.6. Botón "Cálculo de K reducida"

Con este botón el usuario calcula la matriz de rigidez reducida de la estructura y la matriz global reducida de fuerzas nodales de la estructura de forma que establece el sistema de ecuaciones lineales a resolver. Además da a elegir al usuario como calcular este sistema de ecuaciones, calculando así los desplazamientos nodales desconocidos.

FEM_triángulos_macros.xlsm - Microsoft Excel

Inicio Insertar Diseño de página Fórmulas Datos Revisar Vista Programador Acrobat

Calibri 11 Fuente Alineación Número Formato condicional Dar formato como tabla Estilos de celdas Insertar Eliminar Formato Celdas Autosuma Rellenar Ordenar y filtrar Buscar y seleccionar Modificar

GO1 Desplz

	FZ	GA	GB	GC	GD	GE	GF	GG	GH	GI	GJ	GK	GL	GM	GN	GO	GP	GQ	GR	GS	GT	GU
1	v1															Desplz	Valor					
2																v1	0.533228					
3																v2	-0.283884					
4																v3	0.857818					
5																v4	-0.163238					
6																v5	0.847554					
7																v6	-0.852094					
8																v7	0.337630					
9																v8	-0.749639					
10																v9	0.537623					
11																v10	-1.749008					
12																v11	0.505628					
13																v12	-1.650238					
14																v13	2.007100					
15																v14	-2.365844					
16																v15	0.864344					
17																v16	-2.871254					
18																v17	2.454853					
19																v18	-4.486858					
20																v19	0.814724					
21																v20	-4.398633					
22																v21	2.880002					
23																v22	-6.302029					
24																v23	0.867182					
25																v24	-6.266838					
26																v25	3.282307					
27																v26	-8.390986					
28																v27	1.059209					
29																v28	-8.310586					
30																v29	3.668245					
31																v30	-10.738895					
32																v31	1.216968					
33																v32	-18.657228					
34																v33	4.018342					
35																v34	-11.333659					
36																v35	1.336398					
37																v36	-12.262083					
38																v37	4.201983					
39																v38	-16.568305					
40																v39	1.450092					
41																v40	-16.083918					
42																v41	4.662550					
43																v42	-18.194331					
44																v43	1.554178					
45																v44	-18.131835					
46																v45	4.950937					
47																v46	-22.43064					
48																v47	1.650614					
49																v48	-22.372831					
50																v49	5.214947					
51																v50	-25.165632					
52																v51	1.739409					
53																v52	-25.787395					
54																v53	5.456689					
55																v54	-23.431705					
56																v55	1.620538					
57																v56	-23.390081					

Elemento139 Elemento140 Elemento141 Elemento142 Elemento143 Elemento144 Matriz global de rigidez Matriz rigidez reducida

Promedio: -3,865798063 Recuento: 108 Suma: -204,8872973 70%

Figura 17: Pantalla "Matriz rigidez reducida" - EF2D

3.9.7. Botón "Resultados"

A partir de los desplazamientos calculados el programa genera una hoja que llama "Resultados" en la que se importan los datos de coordenadas iniciales y finales de cada uno de los nodos con el fin de graficar la estructura resultante.

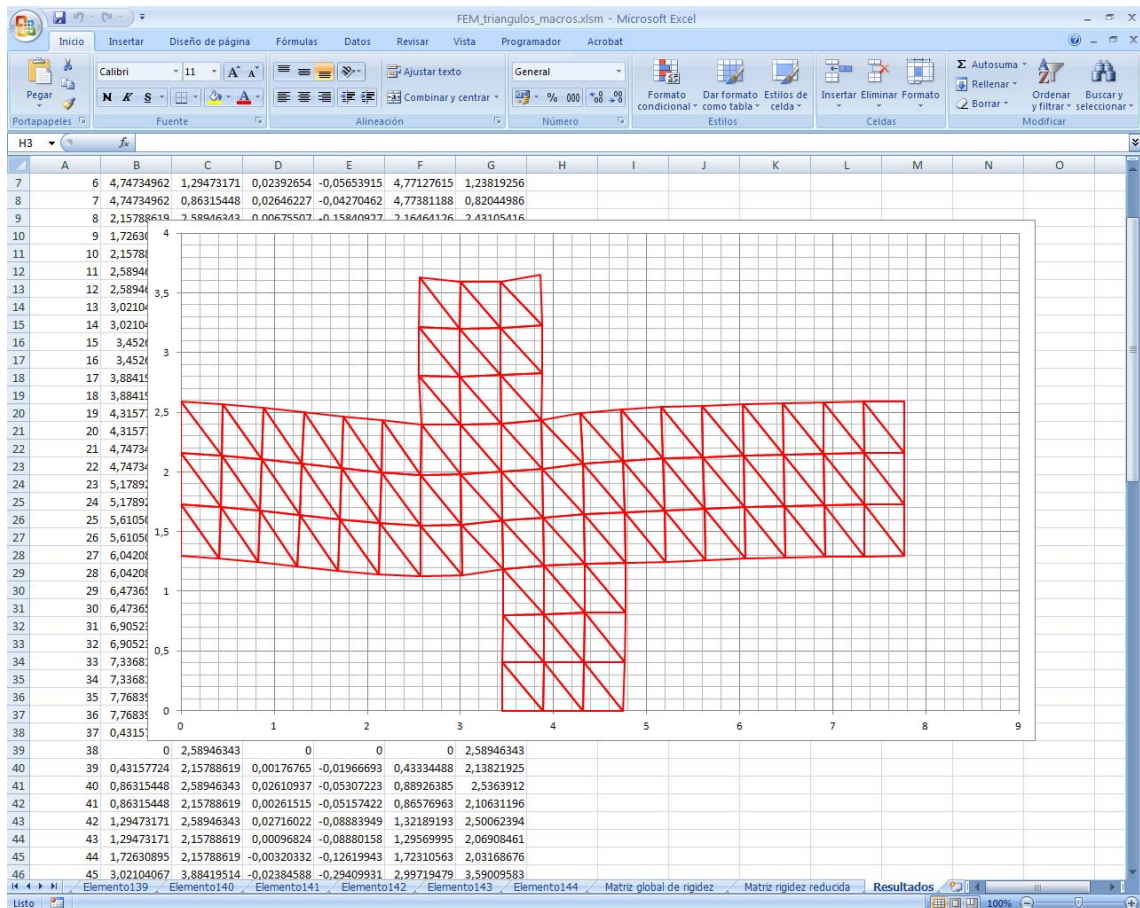


Figura 18: Pantalla "Resultados" - EF2D

3.9.8. Aplicación en Matlab

Como se ha comentado anteriormente, con la aplicación de Excel no se puede hacer mucho más de lo que se ha realizado. Para poder listar mapas de tensiones, deformaciones y desplazamientos, he creído conveniente usar otro entorno de programación con funciones ya implementadas que me facilitasen el trabajo y me permitiese centrarme más en la programación del método de los elementos finitos en sí, que en la programación de un entorno gráfico adecuado. Para ello, el entorno elegido ha sido Matlab. En esta aplicación se importa directamente el archivo "inp" creado y calcula directamente todo lo calculado con Excel, pero pudiendo ver los resultados gráficamente.

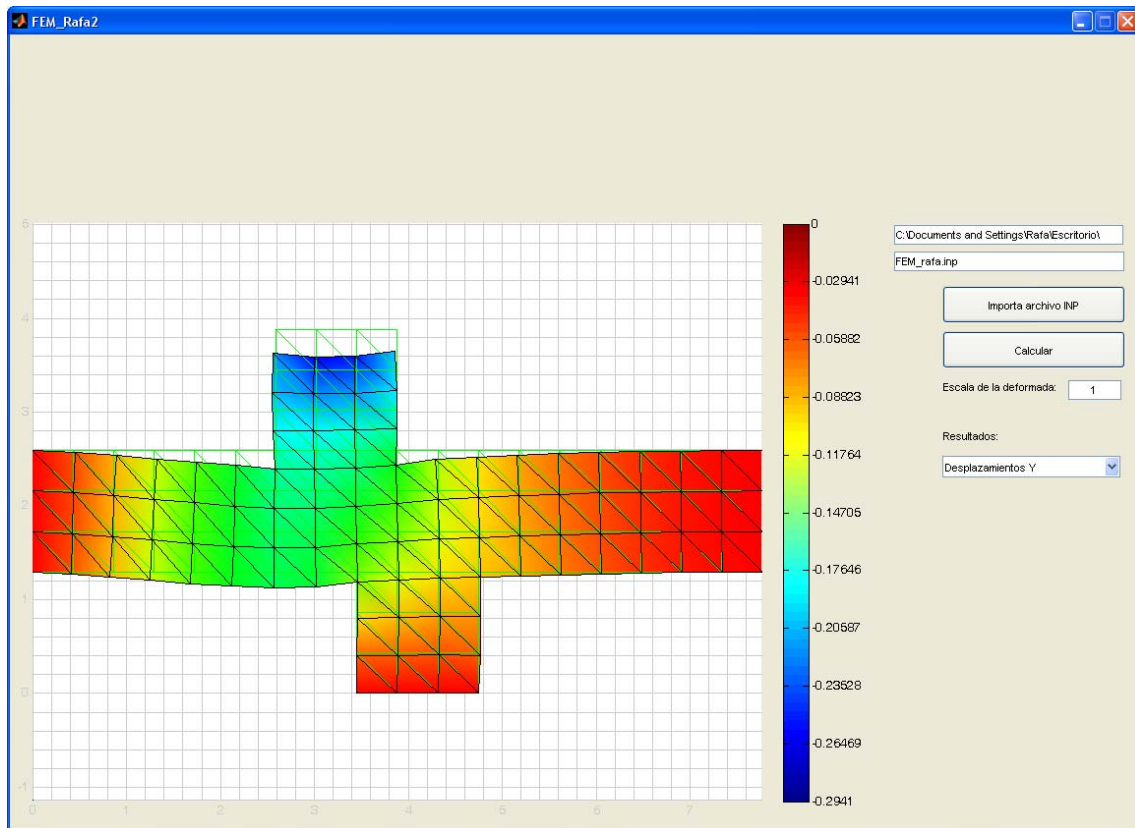


Figura 19: Pantalla Aplicación Matlab-Desplz.Y

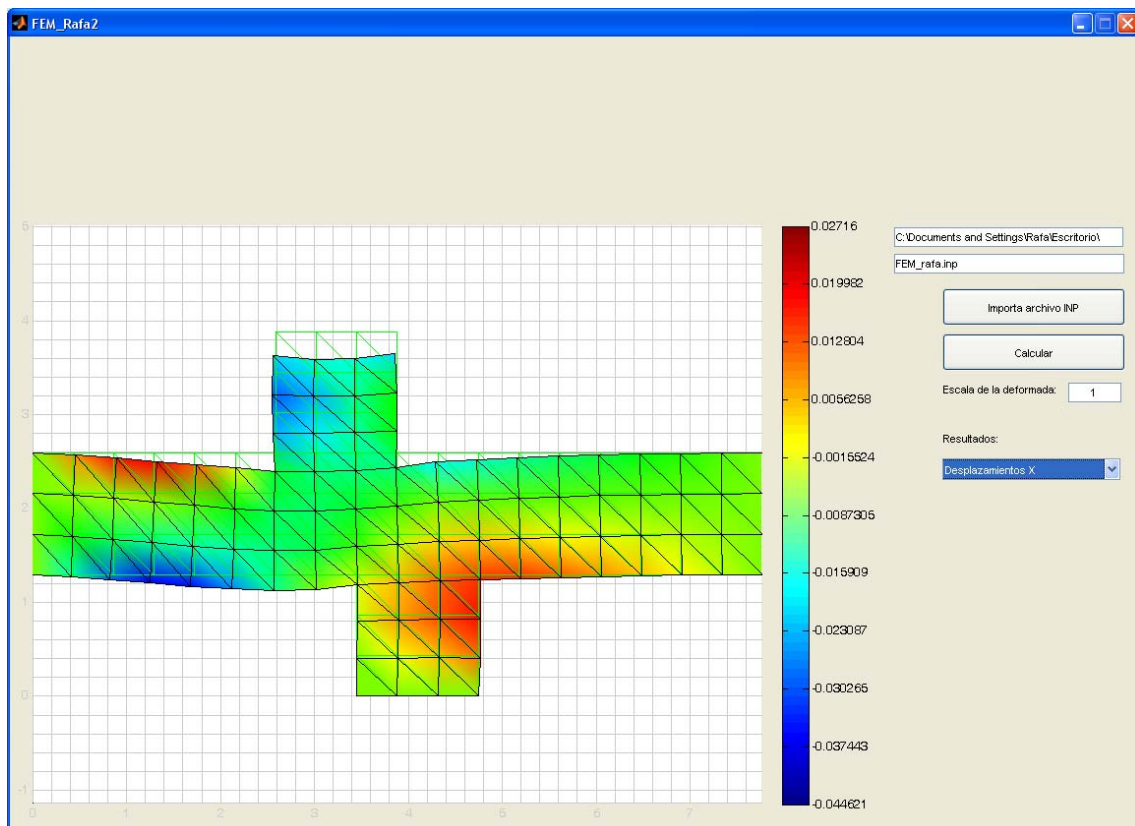


Figura 20: Pantalla Aplicación Matlab-Desplz.X

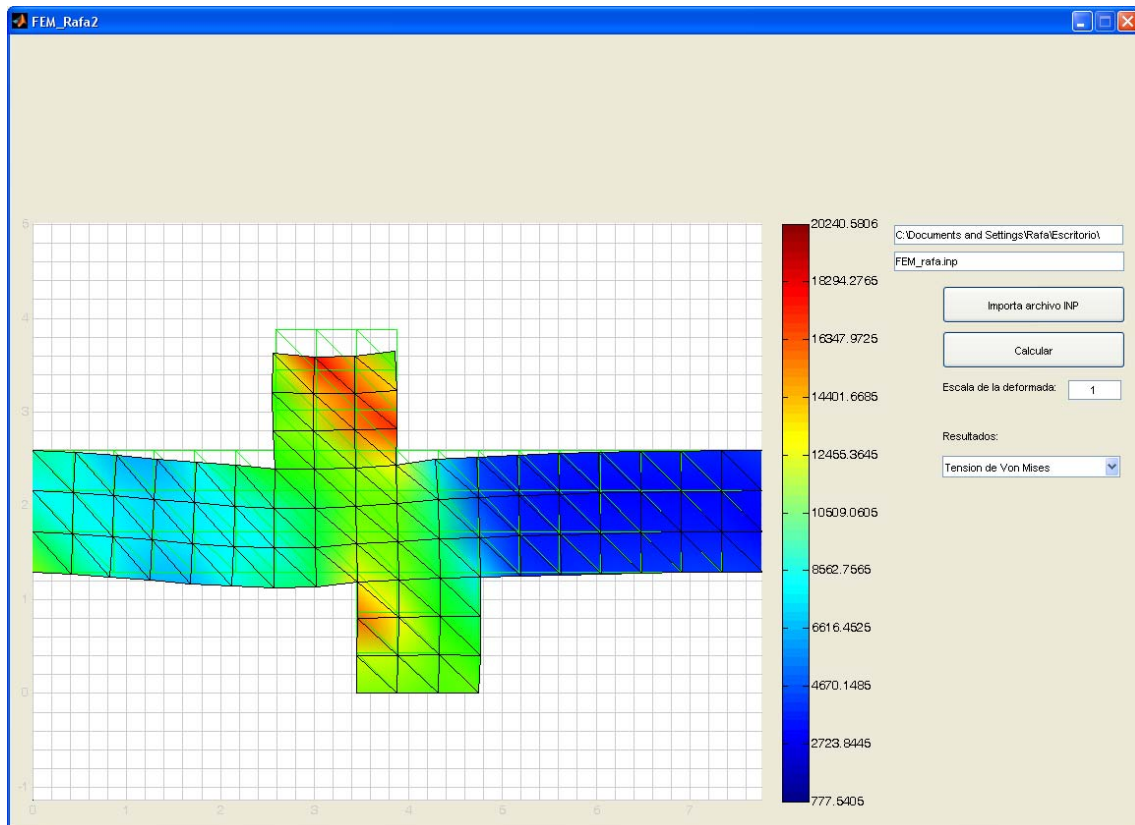


Figura 21: Pantalla Aplicación Matlab- Tensión Von Mises

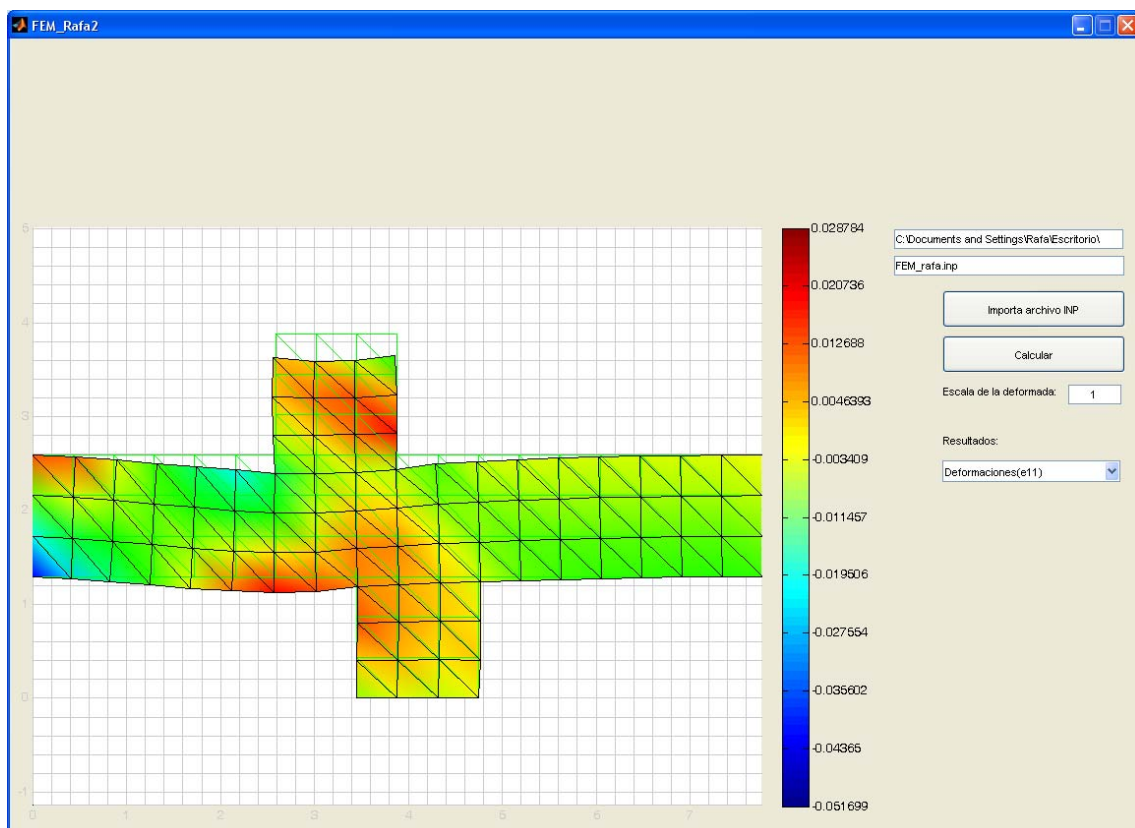


Figura 22: Pantalla Aplicación Matlab-Def.11

3.9.9. Comprobaciones con Abaqus

Debido a que tenía que desarrollar una aplicación para poder exportar los datos de la estructura a analizar, elegí el formato "inp" porque podía importar el archivo también desde Abaqus y así poder comprobar los resultados del trabajo realizado.

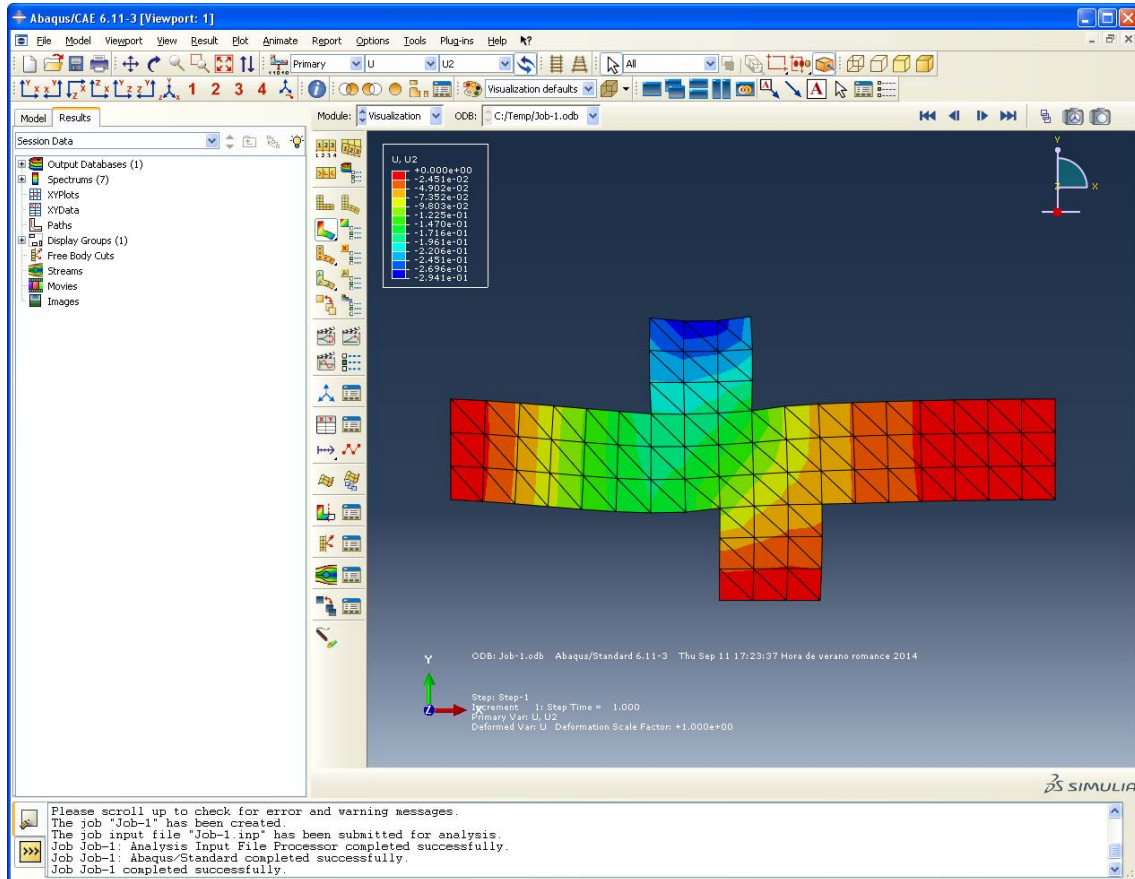


Figura 23: Pantalla Abaqus-Desplz.Y

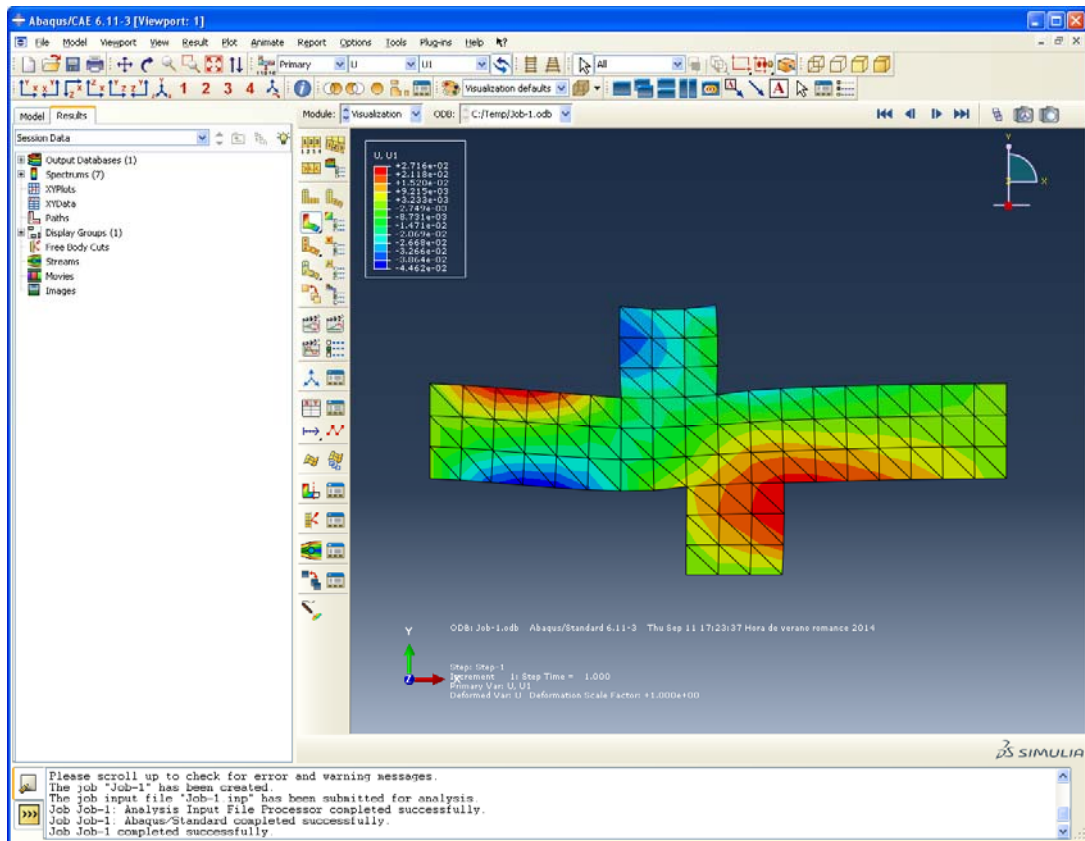


Figura 24: Pantalla Abaqus-Desplz.X

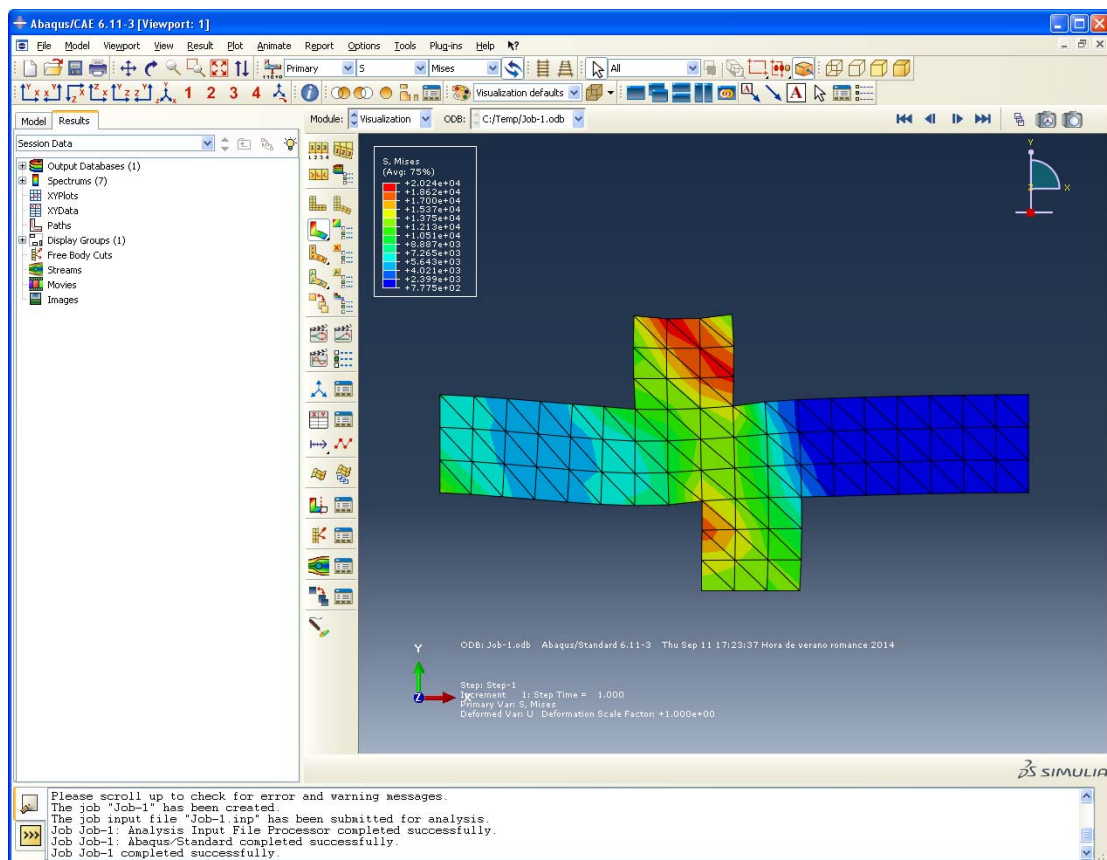


Figura 25: Pantalla Abaqus-Tensión Von Mises

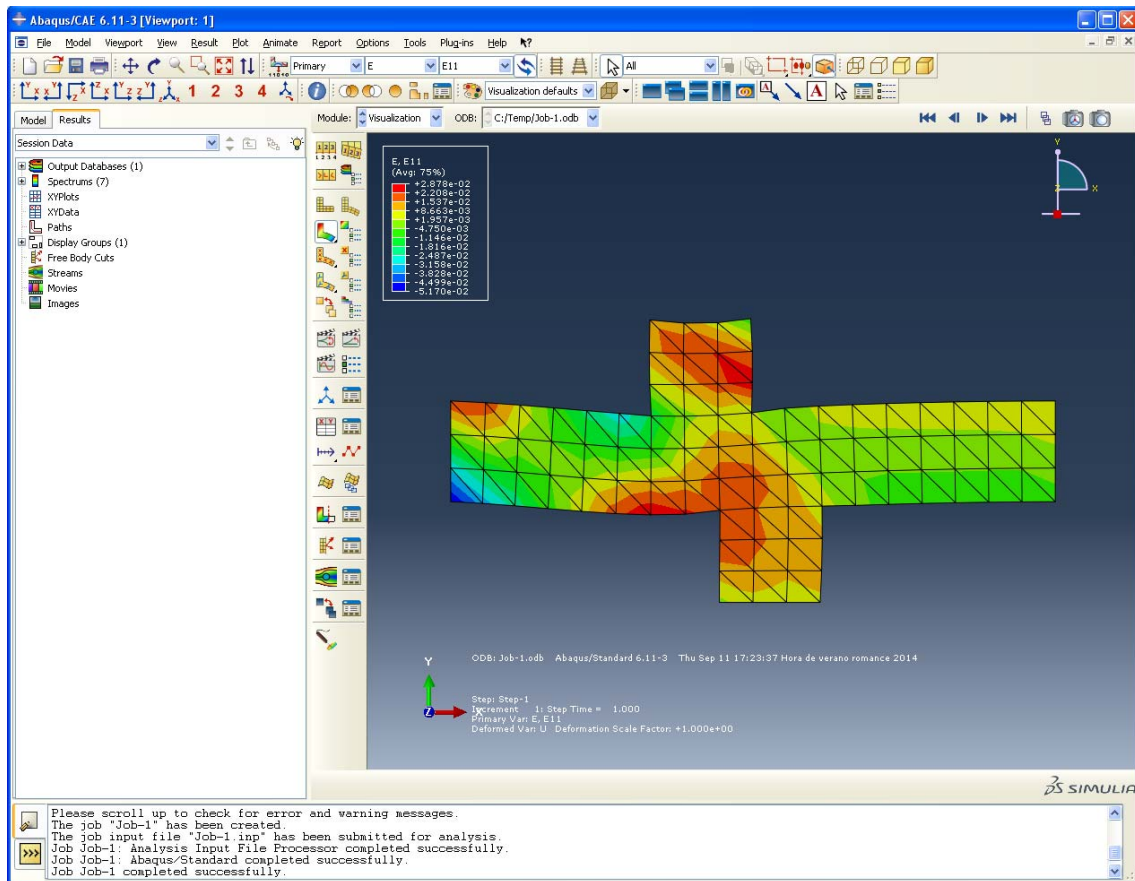


Figura 26: Pantalla Abaqus-Deformación 11

Se puede comprobar que tanto los datos numéricos obtenidos con la hoja Excel como los mapas de tensiones, deformaciones y desplazamientos coinciden en los resultados en los tres casos, por lo que considero que las aplicaciones realizadas consiguen hacer un cálculo correcto por el método de los elementos finitos.

BIBLIOGRAFÍA

- Técnicas de cálculo en el método de los elementos finitos. Luis Gracia Villa, Elena Ibartz Montaner. Zaragoza. 2013.
- Mecánica Computacional en la Ingeniería con Aplicaciones en Matlab. Eduardo W.V. Chaves, Roberto Minguez. Ciudad Real. 2010.
- Análisis Estático de Estructuras por el método matricial. Jose Luis Blanco Claraco, Antonio Gonzalez Herrera, Jose Manuel García-Manrique Ocaña. Universidad de Málaga.
- Ortiz Berrocal, Luis. Elasticidad. 3ª Edición. Mc.graw-Hill. Madrid, 1998.
- Simulia. Abaqus Documentation. 2014
- Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural. Juan Tomás Celigüeta Lizarza. Campus Tecnológico de la Universidad de Navarra. 2011.
- Curso de especialización: Introducción al método de los Elementos Finitos. Claudio E. Jouglaard. Buenos Aires 2002.
- O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, The Finite Element Method, McGraw Hill, Vol. I., 4edn., McGraw-Hill, London, 1989.
- Desarrollo de un software en elementos finitos compatible con gid para resolución de problemas elástico lineales. Verónica Gallego Otalvaro. EAFIT. 2009.
- VBA en Excel 2007. MSDN. Microsoft
- VBA support in Autocad. Autodesk
- MATLAB para ingenieros. Holly Moore. Pearson. Salt Lake City, Utah. 2007
- MATLAB support. Mathworks.

ANEXOS

Se adjuntan junto a los archivos de las aplicaciones en formato CD, los siguientes Anexos en formato pdf:

Anexo 1: Código de programación en Visual Basic for Applications en Excel de la aplicación para el cálculo de estructuras de barras por el método matricial.

Anexo 2: Código de programación en Visual Basic for Applications en Autocad de la aplicación para la exportación de archivos “inp”.

Anexo 3: Código de programación en Visual Basic for Applications en Excel de la aplicación para el cálculo de estructuras continuas 2D por el método de los elementos finitos para elementos triangulares de tres nodos.

Anexo 4: Código de programación en Visual Basic for Applications en Excel de la aplicación para el cálculo de estructuras continuas 2D por el método de los elementos finitos para elementos rectangulares de cuatro nodos.

Anexo 5: Código de programación en Matlab de la aplicación para el cálculo de estructuras continuas 2D por el método de los elementos finitos para elementos triangulares de tres nodos y elementos rectangulares de cuatro nodos.